

Les applications du théorème de Borsuk-Ulam en combinatoire

Nadia Lafrenière

6 mai 2015

Table des matières

1	Introduction	2
2	Le théorème de Borsuk-Ulam	3
2.1	Quelques exemples	4
2.2	Une conséquence : le théorème du point fixe de Brouwer	5
2.3	Implications en combinatoire	8
3	Interlude topologique	12
3.1	Les complexes simpliciaux	12
3.2	Invariants topologiques	14
4	Coloration de graphes	15
4.1	Nombre chromatique des graphes de Kneser	16
4.2	Complexes de voisinages	19

1 Introduction

L'utilisation de théorèmes issus de topologie en combinatoire est plutôt récente. Plusieurs auteurs datent son début à 1978, quand László Lovász a démontré la conjecture de Kneser sur des partitions d'ensembles avec l'aide du théorème de Borsuk-Ulam [2, 3, 7].

Depuis, plus d'un problème a été résolu de cette manière. Les premières preuves font appel à des constructions élaborées qui permettent d'appliquer ce théorème. Il existe aussi une technique « générale ». Elle consiste à considérer les complexes simpliciaux, des constructions faites de segments de points, de droites, de triangles, de tétraèdres, etc. assemblés d'une façon précise, et à en trouver un qui soit équivalent, d'un point de vue topologique, au problème initial. Par exemple, les graphes peuvent être vus comme des complexes simpliciaux de dimension 1. Les propriétés recherchées sont souvent la k -connexité (une généralisation en dimension supérieure de la connexité), la dimension ou les groupes d'homologie.

Dans ce projet sera exploré le théorème de Borsuk-Ulam et quelques-unes de ces conséquences en combinatoire. L'exposé ne prétend pas à l'exhaustivité, mais la lectrice ou le lecteur intéressé-e pourra consulter les références de la bibliographie pour en savoir plus.

Un aperçu des méthodes impliquant des complexes simpliciaux est évidemment présent.

2 Le théorème de Borsuk-Ulam

Cette section a pour but de présenter le théorème de Borsuk-Ulam et quelques applications classiques. La preuve du théorème n'est pas donnée ici, mais peut être trouvée dans un livre de topologie algébrique ([8], par exemple). L'équivalence entre les différentes versions est donnée à l'annexe A. Le théorème a été conjecturé par Stanislaw Ulam en 1933 et prouvé la même année par Karol Borsuk. Il se décline en plusieurs énoncés équivalents dont certains sont listés juste après cette définition nécessaire.

Définition. Une fonction f est dite antipodale si elle est continue et si $f(-x) = -f(x)$, pour tout x .

Théorème 1. *Le théorème de Borsuk-Ulam se décline en au moins quatre énoncés équivalents :*

1. *Il n'existe pas de fonction antipodale $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$, où S^n dénote la sphère de dimension n (le cercle est la sphère de dimension 1.)*
2. *Pour toute fonction antipodale $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, il existe au moins un point où la fonction s'annule.*
3. *Toute fonction continue $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ admet un point x tel que $f(x) = f(-x)$.*
4. *(Aussi appelé théorème de Schnirelman-Ljusternik) Tout recouvrement de S^n par $n+1$ ensembles soient ouverts ou fermés est tel qu'au moins un des ensembles contient une paire de points antipodaux.*

Ce théorème semble a priori n'avoir aucun lien avec la combinatoire. Nous allons d'abord voir ce qu'il signifie en termes topologiques, puis comment on

peut l'appliquer en combinatoire.

2.1 Quelques exemples

Ballon dessoufflé Si on considère un ballon de plage, on peut assumer qu'il a la forme d'une sphère de dimension 2 lorsqu'il est gonflé. Le théorème de Borsuk-Ulam, ou plus précisément l'énoncé 3, implique que, lorsqu'on le dessouffle, deux points antipodaux de la sphère se retrouveront au même endroit du plan.



FIGURE 1 – Source images : [7]

Température et pression Une interprétation classique du théorème de Borsuk-Ulam est de considérer comme fonction continue en dimension 2 le couple formé par la température et la pression (qui seraient continues) en un point de la surface de la Terre (ici considérée comme une sphère). Il y aurait alors en tout temps deux points antipodaux qui auraient la même température et la même pression. Ces points sont variables dans le temps.

2.2 Une conséquence : le théorème du point fixe de Brouwer

Le théorème suivant en est un bien connu de géométrie et en topologie. Nous verrons comment en déduire une preuve simple à partir du théorème de Borsuk-Ulam et une conséquence combinatoire du théorème.

Théorème 2 (Point fixe de Brouwer). *Toute fonction continue $f : B^n \rightarrow B^n$ (où B^n désigne la boule unité) admet au moins un point fixe, i.e. un point x satisfaisant $f(x) = x$.*

Corollaire 3 (du théorème de Borsuk-Ulam). *Il n'existe pas de fonction continue $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$ qui soit antipodale sur le bord de B^n .*

Démonstration. On se sert de l'énoncé 1 du théorème de Borsuk-Ulam et on montre par contradiction le corollaire.

Supposons qu'il existe $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$ qui soit antipodale sur ∂B^n . Soit $\pi : S^n \rightarrow B^n$ la projection qui retire la dernière coordonnée, c'est-à-dire telle que $\pi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$. Cette fonction est continue et fixe le bord de B^n . La fonction $f \circ \pi : S^n \rightarrow S^{n-1}$ est une fonction antipodale, ce qui contredit le théorème de Borsuk-Ulam. \square

Il n'est pas difficile de montrer que le dernier corollaire est en fait équivalent au théorème de Borsuk-Ulam, mais l'implication inverse n'est pas nécessaire pour la démonstration que nous souhaitons faire ici.

Démonstration du théorème du point fixe de Brouwer. Supposons que f n'a aucun point fixe. Soit $g(x) : B^n \rightarrow S^{n-1}$ la fonction qui associe à x l'intersection de la sphère avec la demie-droite de $f(x)$ à x . La fonction est bien

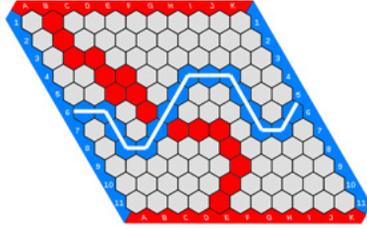


FIGURE 2 – Un tablier 11×11 pour le jeu de Hex. L'existence d'un chemin bleu d'un côté à l'autre du tablier montre que le joueur ou la joueuse aux pions bleus a gagné.

Source image : Wikipédia.

définie si x n'a pas de point fixe. Par le corollaire 3, cette fonction ne peut être antipodale sur le bord (c'est-à-dire sur la sphère).

Or, cette fonction est l'identité au bord de la sphère. Elle y est donc antipodale. \square

Le théorème du point fixe de Brouwer a au moins une application en combinatoire. On peut montrer l'existence d'un-e gagnant-e dans le jeu de Hex, inventé par John Nash, en utilisant le théorème du point fixe de Brouwer.

Ce jeu consiste à remplir une grille hexagonale finie inscrite dans un losange. À chaque tour, un des deux joueurs ou joueuses place un pion de sa couleur sur une case. L'objectif est de tracer un chemin monochrome d'un côté à l'autre du jeu.

Évidemment, il ne peut y avoir à la fois un chemin de gauche à droite et un de bas en haut : cela impliquerait un croisement des chemins.

La partie nulle du jeu de Hex n'existe pas Une application classique (et plutôt ludique) du théorème de Brouwer est de montrer que la partie nulle du jeu de Hex est impossible. Une diversité de preuves de ce fait existe [4, 9]. Je présente les grandes lignes d'une d'entre elles qu'on peut retrouver

dans [6].

Démonstration. Pour ce faire, on considère le tablier de jeu une fois qu'il est rempli. Il s'agit de montrer qu'il y a au moins un segment qui le traverse.

On suppose qu'il n'y en a pas et qu'on travaille dans la configuration de couleurs de la figure 2. Alors, on peut partitionner les tuiles en 4 ensembles : les tuiles couvertes par des pions bleus pour lesquelles il existe un chemin bleu les reliant au côté gauche du tablier, noté BG, et les autres tuiles bleues, BD; on fait de même pour les tuiles rouges et on note celles qui sont reliées au bas RB et les autres RH.

On définit les mouvements unitaires e_1 et e_2 comme un pas vers respectivement la tuile à droite ou en haut dans le tablier. Le haut est défini parallèlement au bord. S'il n'y a pas de gagnant-e, la fonction suivante est bien définie :

$$f(v) = \begin{cases} v + e_1 & \text{si } v \in \text{BG} \\ v - e_1 & \text{si } v \in \text{BD} \\ v + e_2 & \text{si } v \in \text{RB} \\ v - e_2 & \text{si } v \in \text{RH}, \end{cases}$$

où le haut et le bas sont définis par rapport au bord du tablier.

On peut étendre cette fonction non seulement aux tuiles du tablier, mais à tous les points du losange borné par les bords. En effet, pour n'importe quel point, on choisit les trois tuiles v_1 , v_2 et v_3 dont les centres sont les plus proches. Le point peut alors être exprimé comme une combinaison convexe des centres des tuiles et on étend la fonction linéairement : $f(x) = \sum_{i=1}^3 x_i f(v_i)$, $x_i \geq 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

Comme tout polygone convexe est homéomorphe au disque, on peut appli-

quer le théorème du point fixe : Il existe un point x tel que $f(x) = x$. Pour ce point,

$$\sum_{i=1}^3 x_i v_i = \sum_{i=1}^3 x_i f(v_i) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^3 x_i (f(v_i) - v_i) = 0.$$

Au moins un des x_i est non-nul et une tuile n'est jamais fixée par f . On peut supposer que $x_1 \neq 0$ et alors $x_1 f(v_1) \neq x_1 v_1$. Pour que la somme plus haut soit nulle, le pas opposé à celui fait par v_1 doit être accompli par v_2 ou par v_3 . Or, ceci n'arrive que si deux points adjacents sont de même couleur, mais qu'un seul des deux est relié au bord par un chemin, ce qui implique une contradiction. \square

Une autre façon combinatoire de montrer que la partie nulle n'existe pas est d'utiliser le lemme de Tucker, une version discrète du théorème de Borsuk-Ulam.

2.3 Implications en combinatoire

Le théorème de Borsuk-Ulam présente une diversité d'applications en combinatoire. Nous verrons d'abord certaines des plus célèbres. Afin de bien illustrer l'apport du théorème de Borsuk-Ulam, leurs preuves sont aussi esquissées. Ensuite, nous considérerons une technique plus générale pour l'étude de propriétés combinatoires. Finalement, nous appliquerons cette procédure générale à l'étude des graphes.

Le premier théorème présenté ici porte en fait sur les espaces continus. Par contre, il est décrit comme la plus célèbre application du théorème de Borsuk-Ulam [1] et il en existe un analogue discret, énoncé juste après. Il est intéres-

sant de constater le rôle central que joue le théorème de Borsuk-Ulam dans la preuve.

Il sera ensuite présenté un théorème de Charles H. Goldberg et Douglas B. West [5] sur la partition d'un collier. À la section 4 sont enfin esquisées des applications du théorème de Borsuk-Ulam au sujet de la coloration des graphes.

Théorème du sandwich au jambon Une application est le théorème du sandwich au jambon, parfois aussi appelé le théorème de Stone-Tukey, bien qu'il ait été prouvé par Stefan Banach. Une de ses conséquences est l'existence, en dimension 3, d'une coupe en deux parties d'un sandwich fait de jambon, de fromage et de pain de manière à ce que chaque partie contienne la même quantité de chacun des ingrédients. Plus formellement, dans un espace réel,

Théorème 4. *Étant donné n parties finies (mesurables) de \mathbb{R}^n , il existe au moins un hyperplan H qui divise chacune des parties en deux sous-ensembles de mesures égales.*

Démonstration. Supposons n parties de \mathbb{R}^n , notées X_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et de taille $|X_i|$.

Soient $s \in S^{n-1}$ et $t \in \mathbb{R}$. On considère le demi-espace donné par

$$H^+(s, t) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, s \rangle > t\}.$$

Pour une valeur de s et pour i fixés, la fonction qui associe à t la taille de $X_i \cap H^+(s, t)$ est continue et satisfait la condition que $H^+(-s, -t)$ est le demi-espace complémentaire à $\overline{H^+(s, t)}$, ce qui implique que $H^+(s, t)$ et

$H^+(-s, -t)$ partitionnent l'espace, et donc chacun des X_i . Cette fonction est aussi décroissante sur son domaine et prend des valeurs de $|X_i|$ à 0. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc au moins une valeur de t pour laquelle $|X_i \cap H^+(s, t)| = |X_i|/2$.

De plus, la fonction g telle que $|X_1 \cap H^+(s, g(s))| = |X_1|/2$ est aussi continue par rapport à s . Cette fonction partage, pour tout point s de la sphère, l'ensemble X_1 en deux parties égales.

On peut alors définir une fonction continue

$$f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$$

$$s \mapsto (|X_2 \cap H^+(s, g(s))|, \dots, |X_n \cap H^+(s, g(s))|).$$

Par l'énoncé 3 du théorème de Borsuk-Ulam, il existe au moins une valeur de s pour laquelle $f(s) = f(-s)$. Pour ce point, l'hyperplan $\{z \mid \langle z, s \rangle = g(s)\}$ divise chacun des X_i en deux parties de mesures égales.

□

Il existe également une version discrète de ce théorème. Certes, la démonstration est différente parce qu'on travaille sur des ensembles de mesures nulles (des ensembles finis de points), mais l'idée est similaire. Sans en étaler les détails, l'énoncé du théorème va comme suit :

Théorème 5 (Analogie discret du théorème 4). *Soient X_1, \dots, X_n des ensembles finis de points en position générale (c'est-à-dire qu'il n'y a pas plus de n points situés sur le même hyperplan). Alors il existe un hyperplan qui divise en deux ensembles de même taille chacun des X_i . Plus précisément, cet hyperplan a une intersection non-vide avec au plus un point de chacun*

des X_i , et chaque demi-espace contient exactement $\lfloor \frac{|X_i|}{2} \rfloor$ points de X_i , pour tout i entre 1 et n .

Problème du collier dérobé Deux voleurs ont dérobé un collier de perles d'une grande valeur et souhaitent le diviser en parties égales. Comme ils ne connaissent pas la valeur de chacune des perles, ils choisissent de diviser les perles. Puisque la chaîne est faite d'un métal précieux, ils choisissent de la couper en le moins de points possible. Combien de coupes sont nécessaires? On suppose que le nombre de perles de chaque sorte est pair (de manière à ce qu'ils puissent se les diviser entre eux équitablement), qu'il y a n sortes de perles et que le collier peut être ouvert (il y a un mécanisme de fermeture). Le nombre total de perles n'est pas important.

On peut montrer, en utilisant le théorème du sandwich au jambon, que n coupes sont suffisantes. C'est aussi une borne nécessaire, comme le montre cet exemple du pire cas :

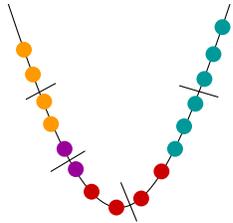


FIGURE 3 – S'il y a n sortes de perles, il est possible que n coupes soient nécessaires, comme plus haut.

Démonstration que n coupes sont suffisantes. On considère la courbe des moments en dimension n :

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto (t, t^2, \dots, t^n). \end{aligned}$$

Tout hyperplan d'un espace de dimension n touche $\gamma(t)$ en au plus n points. En effet, soit h l'hyperplan donné par $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$. Si $\gamma(t) \in h$, alors

$$a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n = b.$$

Comme cette dernière équation est un polynôme de degré n , il admet au plus n solutions.

Par la version discrète du théorème du sandwich au jambon, il existe un hyperplan h de \mathbb{R}^n tel que chaque ensemble d'une même pierre ait exactement la moitié de ses éléments dans chacun des demi-espaces. On place le collier ouvert sur la courbe γ . Comme h a au plus n points d'intersection avec γ , il est possible de couper le collier en au plus n sections. \square

3 Interlude topologique

Comme on a pu en avoir un aperçu plus haut, l'application du théorème de Borsuk-Ulam demande un changement radical de point de vue sur le théorème. Or, l'introduction de la notion de complexes simpliciaux permet une vue plus globale, quoique pas nécessairement plus facile à appliquer.

3.1 Les complexes simpliciaux

Pour cette partie, nous introduisons les complexes simpliciaux. Ceux-ci forment des espaces topologiques discrets, ce qui est utile pour montrer des phénomènes combinatoires.

Définition. Un *simplexe* de dimension n est l'enveloppe convexe d'un en-

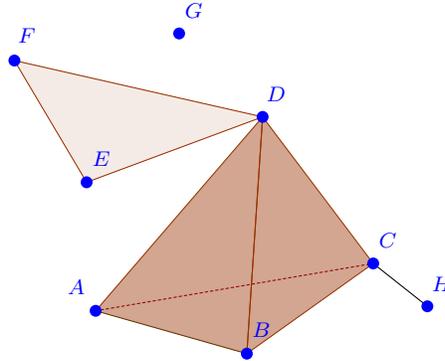


FIGURE 4 – Le complexe simplicial de dimension 3 décrit à l'exemple 6.

semble de $n + 1$ points en position générale dans un espace de dimension n .

Soit Δ un ensemble de simplexes. Alors $|\Delta|$ est un *complexe simplicial* si l'intersection de deux simplexes de Δ est un simplexe de Δ . Autrement dit, $|\Delta|$ est stable par sous-parties. C'est cette propriété qui permet de dire qu'il s'agit d'une topologie.

Exemple 6. Le complexe simplicial représenté à la figure 4 est de dimension 3 (la dimension du complexe est la dimension maximale d'un simplexe) et contient les simplexes suivants (pour abrégier les notations, les ensembles ont été seulement séparés par des virgules et les éléments d'un même ensemble, concaténés) :

$$\{A, B, C, D, E, F, G, H, AB, AC, AD, BC, BD, CD, CH, DE, DF, EF, ABC, ABD, ACD, BCD, DEF, ABCD\}$$

On remarque que les graphes sont des complexes simpliciaux dont les sim-

plexes sont de dimension inférieure ou égale à 1. La dimension d'un simplexe est celle du plus petit espace dans lequel on peut le réaliser.

3.2 Invariants topologiques

Cartes équivariantes

Définition. Soient X et Y des espaces topologiques et soient $\nu : X \rightarrow X$ et $\omega : Y \rightarrow Y$ des homéomorphismes involutifs.

On dit qu'une fonction $f : (X, \nu) \rightarrow (Y, \omega)$ est une *carte équivariante* si elle préserve les actions ν et ω , c'est-à-dire si $f(\nu(x)) = \omega(f(x))$, $\forall x \in X$.

On définit également l'indice d'équivariance d'un espace topologique comme suit :

$$\text{ind}(X) = \min_{n \in \mathbb{N}} (\exists f \text{ équivariante} \mid f : X \rightarrow S^n).$$

Les cartes équivariantes ont la propriété suivante concernant l'indice d'équivariance : S'il existe une telle carte de X vers Y , alors $\text{ind}(X) \leq \text{ind}(Y)$.

Avec cette notion, on peut reformuler le théorème de Borsuk-Ulam :

Théorème 7. $\text{ind}(S^n, -) = n$, où $-$ désigne l'action antipodale.

Il est en fait possible de montrer que s'il existe une carte équivariante de $(S^n, *) \rightarrow (S^m, \star)$, pour n'importe quels homéomorphismes involutifs $*$ et \star , alors $m \geq n$. Cela revient à dire que $\text{ind}(S^n, *) = n$, quelque soit $*$.

k -connexité

Définition. Soit $k \in \mathbb{N}$. Un espace topologique X est k -connexe si pour tout $l = 0, \dots, k$, toute fonction continue de $S^l \rightarrow X$ peut être étendue à une fonction continue de $B^{l+1} \rightarrow X$.

Cette définition est une généralisation de la connexité usuelle. En effet, la connexité par arc correspond à la 0-connexité et la connexité usuelle est la 1-connexité.

Exemple 8. Toute sphère S^n est $n - 1$ -connexe, mais pas n -connexe.

Cet énoncé peut être prouvé par le théorème de Borsuk-Ulam, mais c'est aussi, peu formellement, ce qu'on voit dans un cours d'analyse : La sphère est $n - 1$ -connexe étant donné que toute partie de \mathbb{R}^n peut être envoyée par S^n sur une fonction continue et que S^{n-1} vit dans \mathbb{R}^n . En revanche, la sphère admet un trou (elle est vide à l'intérieur) et n'est donc pas n -connexe.

À partir des observations faites plus haut, on peut imaginer qu'il existe un lien entre les invariants topologiques que sont l'indice d'équivariance et la k -connexité. C'est ce que présente la proposition suivante, énoncée sans preuve :

Proposition 9. *Si X est $k - 1$ -connexe, alors $\text{ind}(X) \geq k$.*

4 Coloration de graphes

Le théorème de Borsuk-Ulam a aussi des applications inusitées, comme de permettre des affirmations sur le nombre chromatique de certains graphes.

4.1 Nombre chromatique des graphes de Kneser

En 1953, le mathématicien allemand Martin Kneser a posé la question suivante : Soit S un ensemble de n éléments. En combien de classes doit-on partitionner les $\binom{n}{k}$ sous-ensembles de S à k éléments de manière à ce que dans chacune des classes, on ne puisse choisir une paire de sous-ensembles disjoints. Il a conjecturé que $n - 2k + 2$ classes étaient toujours nécessaires et suffisantes. Une partie de la preuve ($n - 2k + 2$ classes sont suffisantes) a été achevée par lui et Laszlo Lovász a montré le reste en utilisant le théorème de Borsuk-Ulam.

Pour montrer le résultat, on peut reformuler la question de Kneser en termes de graphes. On définit le *graphe de Kneser* $KG(n, k)$ par un ensemble de sommets formé de tous les sous-ensembles de S à k éléments. Une arête entre deux sommets u et v existe seulement si les ensembles correspondants à u et à v sont disjoints.

Exemple 10. Les trois exemples suivants sont des graphes de Kneser.

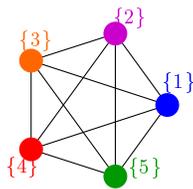


FIGURE 5 – $KG(n, 1) = K_n$.

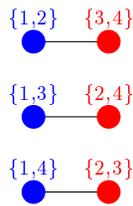


FIGURE 6 – $\chi(KG(2k, k)) = 2$.

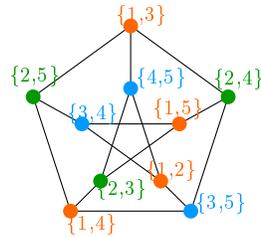


FIGURE 7 – Le graphe de Peterson est isomorphe à $KG(5, 2)$. Son nombre chromatique est 3.

Théorème 11. *Le nombre chromatique de $KG(n, k)$ vaut*

$$\chi(KG(n, k)) = n - 2k + 2.$$

Il est facile de voir que ce théorème est équivalent à celui énoncé plus tôt. En effet, chacune des classes est donnée par les sommets d'une même couleur et le nombre minimal de classes est donné par le nombre chromatique.

Démonstration du théorème 11. Pour simplifier la preuve, on suppose que $S = \{1, 2, \dots, n\}$.

$\chi(KG(n, k)) \leq n - 2k + 2$. On colore le graphe de la façon suivante : Avec la première couleur, on colore tous les sommets qui contiennent 1. Ils ne sont pas liés par une arête, par construction. Avec la deuxième couleur, on colore tous les éléments non-coloriés qui contiennent 2. On fait ainsi de suite pour les $n - 2k + 1$ premières couleurs. Ensuite, il suffit de voir que tous les sommets restants ne sont pas liés par une arête. En effet, les sommets non coloriés après ce processus sont les ensembles à k éléments de $\{n - 2k + 2, \dots, n\}$. Cet ensemble est de cardinalité $2k - 1$. Donc toute paire de sous-ensembles à k éléments a une intersection non-vidée. La coloration résultante est illustrée aux figures 6 et 7.

$\chi(KG(n, k)) \geq n - 2k + 2$. C'est dans cette partie qu'intervient le théorème de Borsuk-Ulam. On pose $d = n - 2k + 1$. Il suffit donc de montrer qu'on ne pourra partitionner adéquatement les sommets du graphe dans d classes.

Soit X un ensemble de n points en position générale sur la sphère S^d (c'est-à-dire qu'il n'existe pas $d + 1$ points de X sur le même hyperplan passant par l'origine.) Bien entendu, on peut identifier les éléments de S avec les points

de X . Ainsi, les sommets de $KG(n, k)$ correspondent aux sous-ensembles de k points de X .

On suppose qu'il existe une façon de colorier les sommets de $KG(n, k)$ avec d couleurs et on fixe une coloration quelconque. On définit les sous-ensembles $A_1, \dots, A_d \subseteq S^d$. Un point $x \in S^d$ appartient à A_i s'il existe k points de X dans l'hémisphère ouvert autour de x qui forment un sous-ensemble colorié par la i -ième couleur dans $KG(n, k)$. L'ensemble $A_{d+1} = S^d \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_d)$. Ainsi, les A_{d+1} ensembles recouvrent S^d (mais ne sont pas nécessairement disjoints.) Les ensembles A_i sont ouverts pour $1 \leq i \leq d$ et fermé pour $i = d + 1$. On peut donc appliquer le théorème de Borsuk-Ulam (plus précisément, c'est la version de Schnirelman et Ljusternik, qui lui est équivalente) pour voir qu'il y a au moins un des ensembles A_i qui contient des points antipodaux.

Si A_i avec $i \leq d$ contient des points antipodaux x et $-x$, il y a k points de X dans l'hémisphère autour de x et k dans celui autour de $-x$ qui sont de couleur i . Comme ces ensembles de points sont nécessairement disjoints, il y a une arête du graphe de Kneser qui lie les sommets correspondants; ils ne peuvent donc pas être de la même couleur.

Si A_{d+1} contient des antipodaux de X , disons y et $-y$, alors l'hémisphère ouvert autour de y dans A_{d+1} contient au plus $k - 1$ points (sans quoi il y aurait une couleur associée à chaque ensemble de k points autour de y). On peut dire la même chose pour $-y$. Il y a donc $n - 2k + 2 = d + 1$ points sur l'équateur, ce qui contredit le fait que les points sont en position générale. \square

4.2 Complexes de voisinages

Cette section vise à donner une borne inférieure sur le nombre chromatique de graphes. L'avantage de cette technique est qu'elle s'applique à n'importe quel graphe. C'est d'ailleurs cette approche qui a permis à Lovász d'écrire la première preuve de la conjecture de Kneser.

Définition. Soit G un graphe. On définit le complexe de voisinage de G par

$$\mathcal{N}(G) = \{A \subseteq \text{Sommets}(G) \mid \text{VC}(A) \neq \emptyset\},$$

où $\text{VC}(A)$ désigne l'ensemble des voisins communs à tous les sommets de A .

Les complexes de voisinage sont des complexes simpliciaux. On peut donc leur appliquer les notations vues plus haut pour montrer le théorème de Lovász :

Théorème 12. *Si $\mathcal{N}(G)$ est k -connecté, alors $\chi(G) \geq k + 3$.*

Idée de la preuve. Cette preuve est assez technique, c'est pourquoi je ne ferai qu'en esquisser les grandes idées.

- On peut associer à $\mathcal{N}(G)$ un complexe simplicial $L(G)$ qui est une rétraction (une déformation continue sur un sous-espace) de $\mathcal{N}(G)$. Les retractions préservent la k -connexité et $L(G)$ est donc k -connexe.
- Pour tout $m \geq \chi(G)$, il existe une carte équivariante de $L(G)$ vers le complexe $B(K_m)$ (le complexe de boîte associé au graphe complet à m sommets - il n'est pas défini ici), un complexe simplicial homotopiquement équivalent à S^{m-2} . En particulier, $\text{ind}(L(G)) \leq \text{ind}(S^{m-2}) = m - 2$ pour tout $m \geq \chi(G)$. D'où, $\chi(G) \geq \text{ind}(L(G)) + 2$.

— Par la proposition 9, un complexe simplicial k -connecté (comme $L(G)$) a un indice d'équivariance supérieur à $k + 1$. En combinant les idées des paragraphes précédents :

$$\chi(G) \geq \text{ind}(L(G)) + 2 \geq k + 3.$$

□

Exemple d'application

Comme mentionné plus haut, le théorème de Lovász a le mérite de fournir une borne inférieure sur le nombre chromatique de n'importe quel graphe et c'est notamment ce qui a permis la première preuve du nombre chromatique des graphes de Kneser. Nous présentons ici un exemple d'un graphe et de la construction de son complexe de voisinage. On verra que l'énoncé du théorème est compatible avec la pratique.

Exemple 13. Considérons le graphe illustré à la figure 8. Il est possible de colorier ce graphe avec trois couleurs, comme le montre la figure. Trois couleurs sont aussi nécessaires. On peut le déduire du théorème de Lovász. En effet, le complexe de voisinage du graphe (aussi représenté à la figure 8) est connexe par arc, mais pas connexe. Le théorème implique que le nombre chromatique du graphe est au moins 3. Pour un argument plus simple, on aurait aussi pu voir que le graphe contient un triangle (K_3), mais cet argument ne peut toujours s'appliquer. Il existe en effet des graphes sans triangle de nombre chromatique arbitrairement élevés, comme les graphes de Mycielski.

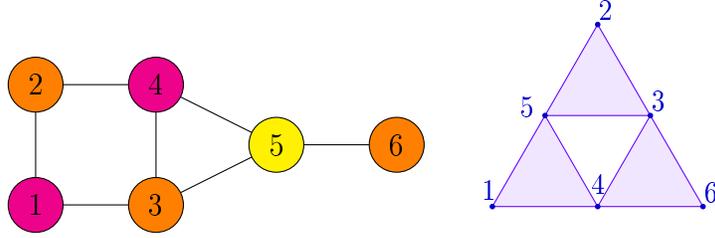


FIGURE 8 – Un graphe et son complexe de voisinage.

A Équivalence entre les différentes versions du théorème

La prochaine preuve discute de l'équivalence entre les différents énoncés du théorème. D'autres versions ont été données, dont certaines se trouvent dans ce texte.

Démonstration.

(1 \Rightarrow 2) Soit $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction antipodale qui ne s'annule jamais. Soit $g : S^n \rightarrow S^{n-1}$ la fonction bien définie qui satisfait

$$g(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|}.$$

Alors g est antipodale, ce qui contredit 1.

(2 \Rightarrow 3) Soit $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue pour laquelle il n'existe pas de point x satisfaisant $f(x) = f(-x)$. Soit $g : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la fonction définie par

$$g(x) = f(x) - f(-x) \neq 0, \forall x \in S^n.$$

Il est facile de vérifier que cette fonction est antipodale. Il n'y a cependant aucun point où g s'annule, contredisant 2.

(3 \Rightarrow 4) On montre cette implication par contradiction. On découpe S^n en $n + 1$ ensembles $A = \{A_1, \dots, A_{n+1}\}$ soit ouverts ou fermés et on suppose qu'aucun ensemble ne contient une paire de points antipodaux.

Supposons que $A_i, i \leq n$ est fermé et $x \in A_i$. Comme $-x$ n'appartient pas à A_i , par hypothèse, $d(-x, A_i) > 0$. De la même façon, si $A_i, i \leq n$, est ouvert et $x \in A_i$, $-A_i \subseteq S^n \setminus A_i$ et par le même argument, $d(-x, A_i) = d(x, -A_i) > 0$.

On définit la fonction continue $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$f(x) = (d(x, A_1), d(x, A_2), \dots, d(x, A_n)).$$

Par l'énoncé 3 du théorème, il y a au moins un point x de la sphère pour lequel $f(x) = f(-x)$. Par ce qui précède, x ne peut être dans aucun des A_i . Il faut donc que $x \in A_{n+1}$, puisque A recouvre la sphère. Il en est de même pour $-x$. Il y a donc un ensemble qui contient des points antipodaux.

(4 \Rightarrow 1) On fait une remarque préliminaire : La sphère de dimension n peut être recouverte par $n + 2$ fermés qui ne contiennent aucune paire de points antipodaux. Pour le voir, on constate que la sphère « vit » dans un espace de dimension $n + 1$ et que le simplexe de cette dimension a $n + 2$ faces. On rappelle que le simplexe est la construction géométrique fermée la plus simple. En dimension 2, il s'agit du triangle et en dimension 3, du tétraèdre. Si on place un simplexe au centre de la sphère et qu'on projette sur elle les bords de ses faces, la fermeture de chacune des régions forme un recouvrement de la sphère en $n + 2$ ensembles qui ne contiennent aucuns points antipodaux, comme le montre la figure 9.

Supposons qu'il existe une fonction antipodale $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$ et soit

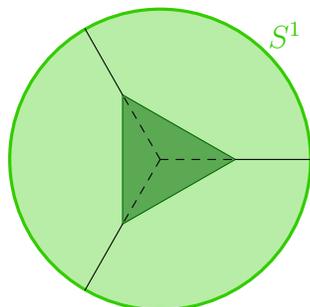


FIGURE 9 – En dimension 2, le partitionnement de S^1 donné par la projection du simplexe de dimension 2, le triangle. Aucune partie ne contient de points antipodaux.

$\{F_1, \dots, F_{n+1}\}$ un recouvrement de S^{n-1} par des fermés qui ne contiennent pas de points antipodaux.

Alors $f^{-1}(F_1), f^{-1}(F_2), \dots, f^{-1}(F_{n+1})$ est une collection de $n + 1$ fermés qui recouvrent S^n et qui ne contiennent pas de points antipodaux, contredisant ainsi l'énoncé 4. □

Références

- [1] Anders BJÖRNER : Topological methods. *In Handbook of combinatorics, Vol. 1, 2*, pages 1819–1872. Elsevier, Amsterdam, 1995.
- [2] Mark DE LONGUEVILLE : *A course in topological combinatorics*. Universitext. Springer, New York, 2013.
- [3] Mark DE LONGUEVILLE : 25 years of the Kneser conjecture : The advent of topological combinatorics. *European Mathematical Society Newsletter*, (53):16–19, September 2004.
- [4] David GALE : The game of Hex and the Brouwer fixed-point theorem. *The American Mathematical Monthly*, 86(10):818–827, 1979.

- [5] Charles H. GOLDBERG et Douglas B. WEST : Bisection of circle colorings. *Society for Industrial and Applied Mathematics. Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 6(1):93–106, 1985.
- [6] Samuel KOLINS : Topological methods in combinatorics. Notes de cours.
- [7] Jiří MATOUŠEK : *Using the Borsuk-Ulam theorem*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [8] James R. MUNKRES : *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley Publishing Company, 1984.
- [9] Matej STEHLIK : Topological methods in combinatorics. Cours doctoral, Mars-avril 2015.