

# Devoir 1

à remettre le 10 oct 2017

Pour les étudiants dont le code permanent est entre **FIL** et **GAGA**.

- (i) Aucun travail rédigé au crayon plomb ne sera corrigé.
- (ii) Il faut bien écrire votre réponse (*e.g.* sans trop de ratures).
- (iii) Si vous voulez transmettre votre devoir par courriel, il faut envoyer le fichier en format PDF. Aucun scan ni document Word ne sera accepté.
- (iv) Vous pouvez remettre votre devoir en français ou en anglais.
- (v) Vous remettez une copie par personne.

**Exercice 1** Soit les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Indiquer si chacune des opérations suivantes est bien définie et effectuer ce calcul dans le cas où l'opération est bien définie :

- (i)  $AB + C$
- (ii)  $(AB)^2$
- (iii)  $A + B$
- (iv)  $(C + D^T)^3$
- (v)  $A(C^T + D)^8$

**Exercice 2** Soit la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -6 & 0 & 2 & -9 \\ -1 & 1 & -3 & 3 & 4 & -5 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -6 & -7 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan pour obtenir une matrice réduite échelonnée. De plus, indiquer son rang.

**Exercice 3** Le *trace* d'une matrice carrée d'ordre  $n$   $A = [a_{ij}]$ , noté  $\text{tr}(A)$ , est la somme des entrées sur la diagonale principale.

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Montrer que, soit  $A$  et  $B$  des matrices carrées d'ordre  $n$  on a

- (i)  $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$
- (ii)  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
- (iii)  $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$
- (iv)  $\text{tr}(AA^T) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$ .
- (v) Si on suppose de plus que  $A$  est symétrique et  $B$  est antisymétrique, montrer que  $\text{tr}(AB) = 0$ .

**Exercice 4** Résoudre chacun des systèmes d'équations linéaires suivants :

$$(i) \begin{bmatrix} -3 & -2 & -3 & -1 \\ -4 & -3 & -4 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

**Exercice 5** Soit la matrice suivante :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Trouver l'inverse de  $M$ .

Donner le polynôme minimal de  $M$ .