

Exercices 7

by Aram Dermenjian

31 octobre 2017

Un exercice marqué du symbole \star est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen. Un exercice marqué du symbole \dagger est trouvé dans les notes du cours.

Exercice 1 (\dagger) Soit les matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 9 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

- (i) Calculer le déterminant de chacune de ces matrices.
- (ii) Si la matrice est inversible, calculer son inverse en utilisant sa matrice adjointe.

Démonstration. (i) (a) -26

(b) -6

(c) -3

(d) 0

(ii) (a) $\begin{bmatrix} \frac{5}{26} & -\frac{1}{26} \\ \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{6} \\ 2 & - & - \\ \frac{1}{2} & - & - \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -1 & - & \frac{1}{3} & 2 \\ 1 & - & -\frac{1}{3} & -1 \\ 2 & - & -\frac{3}{3} & -4 \end{bmatrix}$

(d) Aucun

□

Exercice 2 (\dagger) Soit le système d'équations linéaires suivant $AX = B$, où

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 7 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- (i) Calculer le déterminant de la matrice A .
- (ii) En utilisant la règle de Cramer, déterminer l'unique solution de ce système d'équations linéaires.

Démonstration. (i) -728

(ii) $\begin{bmatrix} \frac{215}{364} \\ \frac{364}{29} \\ -\frac{91}{19} \\ -\frac{364}{277} \\ \frac{364}{364} \end{bmatrix}$

□

Exercice 3 (†) Soit les matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 9 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- (i) Calculer le déterminant de chacune de ces matrices.
 (ii) En utilisant ce déterminant, indiquer si ces matrices sont inversibles.

Démonstration. (i) (a) 18

- (b) 9
 (c) 7
 (d) -250
 (ii) (a) Oui
 (b) Oui
 (c) Oui
 (d) Oui

□

Exercice 4 (†) (i) Montrer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1).$$

(ii) Montrer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

(iii) Montrer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ c & b & (x+a) \end{vmatrix} = (x^3 + ax^2 + bx + c)$$

Exercice 5 (†) Étant donné une matrice carrée A de format $n \times n$, nous définissons son polynôme caractéristique comme étant $P_A(x) = \det(A - xI_n)$. Soit A une des matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 9 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

- (i) Calculer le polynôme caractéristique $P_A(x)$ pour A .
 (ii) Comparer le coefficient constant $P_A(0)$ de $P_A(x)$ et le déterminant de A .
 (iii) Comparer la trace $\text{tr}(A)$ de la matrice A et le coefficient de x^{n-1} dans le polynôme caractéristique $P_A(x)$.
 (iv) Calculer $P_A(A)$ pour A .

Démonstration. (i) (a) $x^2 - x - 26$.

- (b) $x^3 + 4x^2 - 15x + 6$.
 (c) $x^4 - 5x^3 + x^2 - 21x - 3$.
 (d) $x^4 + 8x^3 - 14x^2 - 105x$.
- (ii) (a) -26 .
 (b) -6 .
 (c) -3 .
 (d) 0 .
- (iii) (a) 1 .
 (b) -4 .
 (c) 5 .
 (d) -8 .
- (iv) (a) $0_{2 \times 2}$.
 (b) $0_{3 \times 3}$.
 (c) $0_{4 \times 4}$.
 (d) $0_{4 \times 4}$.

□

Exercice 6 (†) Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Montrer que le polynôme caractéristique de A est

$$P_A(x) = \det(A - xI_2) = x^2 - (a + d)x + (ad - bc).$$

Exercice 7 (†) Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Montrer que le polynôme caractéristique $P_A(x) = \det(A - xI_3)$ de A est

$$-x^3 + (a + e + i)x^2 - \left(\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} \right) x + \det(A)$$

Exercice 8 (†) Soit la matrice symétrique :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

où a, b, c sont des nombres réels. Montrer que les racines du polynôme caractéristique de A

$$P_A(x) = \det(A - xI_2) = x^2 - (a + c)x + (ac - b^2)$$

sont des nombres réels. Rappelons que les racines du polynôme $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, où $\alpha \neq 0$, sont

$$\frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Exercice 9 (†) Soit une fonction $f(x)$ telle que ses valeurs aux points 0, 1, 3 et 4 sont $f(0) = 2$, $f(1) = 3$, $f(3) = -1$, et $f(4) = -18$. En utilisant la règle de Cramer, déterminer l'unique polynôme $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ de degré trois tel que $P(0) = f(0)$, $P(1) = f(1)$, $P(3) = f(3)$ et $P(4) = f(4)$.

Démonstration. On aura

$$\begin{aligned}
 P(x) &= \sum_{i=0}^3 f(x_i) \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \\
 &= f(0) \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)} + f(1) \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-3)(1-4)} + f(3) \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(3-0)(3-1)(3-4)} + f(4) \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(4-0)(4-1)(4-3)} \\
 &= \frac{2(x^2-7x+12)(x-1)}{-12} + \frac{3(x)(x^2-7x+12)}{6} + \frac{-x(x^2-5x+4)}{-6} + \frac{-18x(x^2-4x+3)}{12} \\
 &= \frac{x^3-7x^2+12x-x^2+7x-12}{-6} + \frac{x^3-7x^2+12x}{2} + \frac{x^3-5x^2+4x}{6} + \frac{-18x^3+72x^2-54x}{12} \\
 &= \frac{-2x^3+16x^2-38x+24}{12} + \frac{6x^3-54x^2+72x}{12} + \frac{2x^3-10x^2+8x}{12} + \frac{-18x^3+72x^2-54x}{12} \\
 &= \frac{-2x^3+6x^3+2x^3-18x^3+16x^2-42x^2-10x^2+72x^2-38x+72x+8x-54x+24}{12} \\
 &= \frac{-12x^3+36x^2-12x+24}{12} \\
 &= -x^3+3x^2-x+2
 \end{aligned}$$

□