

Exercices 6

by Aram Dermenjian

17 octobre 2017

Un exercice marqué du symbole \star est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen. Un exercice marqué du symbole \dagger est trouvé dans les notes du cours.

Exercice 1 (\dagger) Soit la permutation

$$\sigma = [4, 2, 1, 5, 8, 7, 3, 6]$$

Déterminer la longueur $\ell(\sigma)$ de σ et son signe $\text{sgn}(\sigma)$.

Exercice 2 Calculer le déterminant de chacune de ces matrices en utilisant des opérations élémentaires de ligne ou de colonne.

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(iii)\star \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ -5 & -4 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Exercice 3 Calculer le déterminant de chacune de ces matrices :

$$(i) \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ -1 & 3 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Exercice 4 Calculer le déterminant de chacune de ces matrices :

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ \frac{1}{a} & 1 & \frac{b}{a} \\ \frac{1}{b} & \frac{a}{b} & 1 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} \\ a & 1 & \frac{1}{a} \\ a^2 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & -b+c \\ -c & b-c & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 5 (\star) Calculer le déterminant de chacune de ces matrices :

$$(i) \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

Exercice 6 Soit une matrice carrée A d'ordre n , montrer que :

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$$