

# Exercices 6

by Aram Dermenjian

17 octobre 2017

Un exercice marqué du symbole  $\star$  est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen. Un exercice marqué du symbole  $\dagger$  est trouvé dans les notes du cours.

**Exercice 1** ( $\dagger$ ) Soit la permutation

$$\sigma = [4, 2, 1, 5, 8, 7, 3, 6]$$

Déterminer la longueur  $\ell(\sigma)$  de  $\sigma$  et son signe  $\text{sgn}(\sigma)$ .

**Exercice 2** Calculer le déterminant de chacune de ces matrices en utilisant des opérations élémentaires de ligne ou de colonne.

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(iii)\star \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ -5 & -4 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

**Exercice 3** Calculer le déterminant de chacune de ces matrices :

$$(i) \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ -1 & 3 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

**Exercice 4** Calculer le déterminant de chacune de ces matrices :

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ \frac{1}{a} & 1 & \frac{b}{a} \\ \frac{1}{b} & \frac{a}{b} & 1 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} \\ a & 1 & \frac{1}{a} \\ a^2 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & -b+c \\ -c & b-c & 0 \end{bmatrix}$$

**Exercice 5** ( $\star$ ) Calculer le déterminant de chacune de ces matrices :

$$(i) \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

**Exercice 6** Soit une matrice carrée  $A$  d'ordre  $n$ , montrer que :

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$$