

## Exercices 5

by Aram Dermenjian

3 octobre 2017

Un exercice marqué du symbole  $\star$  est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen. Un exercice marqué du symbole  $\dagger$  est trouvé dans les notes du cours.

**Exercice 1** ( $\dagger$ ) Soit les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

- (i) Calculer le polynôme minimal de chacune de ces matrices.
- (ii) En utilisant ce polynôme minimal, indiquer si ces matrices sont inversibles. Si oui, calculer l'inverse.
- (iii) Calculer les puissances suivantes :  $A^8$ ,  $B^{10}$ ,  $C^6$ , en utilisant le polynôme minimal.

**Exercice 2** Soit les matrices suivantes :

- (i)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- (ii)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- (iii)  $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$
- (iv)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & -c_2 \end{bmatrix}$
- (v)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
- (vi)  $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

- (i) Calculer le polynôme minimal de chacune de ces matrices.
- (ii) Déterminer si les matrices sont inversibles, et si oui, calculer l'inverse.

**Exercice 3** ( $\dagger$ ) Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$$

Calculer le polynôme minimal de  $A$ .

**Exercice 4** Calculer le 1000<sup>e</sup> puissance de la matrice suivante, à l'aide du polynôme minimal.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Exercice 5 (★)** Montrer que même si  $A$  et  $B$  sont deux matrices inversibles de même format, alors  $A + B$  n'a pas forcément un inverse.