Exercices 4 solutions

by Aram Dermenjian

26 septembre 2017

Un exercice marqué du symbole $\star$ est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen. Un exercice marqué du symbole † est trouvé dans les notes du cours.

Exercice 1 Donner la matrice élémentaire $E_5(\mathcal{O}_p)$ pour les opérations élémentaires suivants :

(i) $\mathcal{O}_p = L_1 \leftarrow 2L_1$

(ii) $\mathcal{O}_p = L_3 \leftarrow -L_3$

(iii) $\mathcal{O}_p = L_2 \leftrightarrow L_4$

(iv) $\mathcal{O}_p = L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$

(v) $\mathcal{O}_p = L_2 \leftarrow L_2 + 5L_4$

(vi) $\mathcal{O}_p = L_1 \leftarrow L_1 + xL_5$

Démonstration. (i) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

□

Exercice 2 Donner l'opération élémentaire pour les matrices élémentaires suivantes :

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Démonstration. (i) $\mathcal{O}_p = L_3 \leftarrow \frac{1}{7} L_3$

(ii) $\mathcal{O}_p = L_1 \leftrightarrow L_2$

(iii) $\mathcal{O}_p = L_1 \leftrightarrow L_2$

(iv) $\mathcal{O}_p = L_1 \leftarrow L_1 - 5L_3$

□

Exercice 3 Écrire les matrices suivantes comme un produit de matrices élémentaires :

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Démonstration. (i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{bmatrix}$

(ii) None $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

□

Exercice 4 (†) Pour chacune des matrices carrées suivantes, déterminer si elle est inversible ou pas et si elle est inversible, calculer son inverse.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 7 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Démonstration. (i) $\begin{bmatrix} 22 & -8 & -5 \\ 3 & -1 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) Pas inversible.

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{7}{2} \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -\frac{13}{2} \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & -a & ab-c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

□

Exercice 5 Les matrices suivantes, sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(iv)⋆ $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$

(v)⋆ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & \cdots & d_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \\ 0 & d_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ d_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(vi)⋆ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(vii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & b \end{bmatrix}$

(viii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(ix) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(x) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Démonstration. (i) Pas inversible

(ii) $\begin{bmatrix} -5 & -4 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{7}{2} \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -\frac{13}{2} \end{bmatrix}$

(iv) Notons notre matrice par A. L'inverse est donné par $B = [b_{ij}]$ où

$$b_{ij} = \begin{cases} \frac{j(n-i+1)}{n+1} & \text{si } i \geq j \\ \frac{i(n-j+1)}{n+1} & \text{si } i < j \end{cases}$$

Il faut montrer que $B = A^{-1}$, c'est-à-dire que $AB = I_n$. Si on regarde le i-ième ligne et j-ième colonne il y a trois cas. Soit $i = j$, soit $i < j$ et soit $i > j$. Le dernière deux sont pareils, alors faisons $i > j$.

Le i-ième ligne a 0 partout sauf les lignes $i-1$, i, et $i+1$. Alors AB nous donnes

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} &= a_{i-1}b_j + a_ib_j + a_{i+1}b_j \\ &= \frac{-j(n-(i-1)+1)+2j(n-i+1)-j(n-(i+1)+1)}{n+1} \\ &= \frac{-j(n-i+2)+2j(n-i+1)-j(n-i)}{n+1} \\ &= \frac{-jn+ji-2j+2jn-2ji+2j-jn+ji}{n+1} \\ &= 0\end{aligned}$$

Si $i=j$ on aura que $i-1<j$. Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} &= a_{i-1}b_j + a_ib_j + a_{i+1}b_j \\ &= \frac{-(i-1)(n-j+1)+2j(n-i+1)-j(n-(i+1)+1)}{n+1} \\ &= \frac{-in+ij-i+n-j+1+2jn-2ji+2j-jn+ji}{n+1} \\ &= \frac{-in-i+n+1+jn+j}{n+1} \\ &= \frac{-in-i+n+1+in+i}{n+1} \\ &= \frac{n+1}{n+1} = 1.\end{aligned}$$

Ainsi, $AB = I_n$ et B est l'inverse de A.

(v) $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n^{-1} \\ 0 & 0 & \cdots & d_{n-1}^{-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \\ 0 & d_2^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ d_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(vi) Notons notre matrice par A. L'inverse est $B = [b_{ij}]$ où

$$b_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{n-1} & \text{si } i \neq j \\ \frac{-n+2}{n-1} & \text{si } i = j \end{cases}$$

Il faut montrer que $B = A^{-1}$, c'est-à-dire que $AB = I_n$. Si on regarde le i-ième ligne et j-ième colonne de AB on trouve :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} - b_{jj}$$

Si $i=j$ alors

$$\sum_{k=1}^{n} b_{kj} - b_{jj} = \frac{n-1}{n-1} + \frac{-n+2}{n-1} - \frac{-n+2}{n-1} = 1$$

Si $i \neq j$ alors

$$\sum_{k=1}^{n} b_{kj} - b_{jj} = \frac{n-1}{n-1} + \frac{-n+2}{n-1} - \frac{1}{n-1} = \frac{n-1-n+2-1}{n-1} = 0$$

Donc $AB = I_n$ et B est l'inverse de A.

(vii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ -\frac{a}{b} & 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$

(viii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

(ix) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(x) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

□

Exercice 6 ($\star$) Montrer que si la matrice symétrique A a un inverse, alors A^{-1} est aussi symétrique.

Démonstration. Il faut montrer que $A^{-1} = (A^{-1})^T$. On a que

$$AA^{-1} = I_n = I_n^T = (A^{-1}A)^T = A^T(A^{-1})^T.$$

Mais, $A = A^T$ car A est symétrique. Donc $AA^{-1} = A^T(A^{-1})^T = A(A^{-1})^T$. Parce que A est inversible, on peut multiplier à gauche par son inverse. Ainsi

$$A^{-1} = A^{-1}AA^{-1} = A^{-1}A(A^{-1})^T = (A^{-1})^T.$$

□

Exercice 7 (†) À partir de la matrice des transactions intersectorielles donnée dans le tableau ci-dessous pour une économie constituée de 3 secteurs :

Vente à / de	Secteur 1	Secteur 2	Secteur 3	Demande des ménages	Ventes totales
Secteur 1	20	30	10	40	100
Secteur 2	10	50	40	100	200
Secteur 3	20	80	50	50	200

(i) Calculer la matrice des coefficients techniques A.

(ii) Calculer la matrice $E = (I_3 - A)^{-1}$ des effets.

(iii) Évaluer l'effet d'un accroissement de 1 unité la demande des ménages pour chacun des secteurs sur les ventes totales.

Démonstration. (i) La matrice des coefficients techniques A est

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

(ii)

$$E = \begin{bmatrix} 1.34307585247042 & 0.368823938761308 & 0.187891440501044 \\ 0.320111343075852 & 1.64231036882394 & 0.459290187891440 \\ 0.528879610299234 & 0.974251913709116 & 1.62839248434238 \end{bmatrix}$$

(iii) L'effet de secteur 1 :

$$\begin{bmatrix} 1.34307585247042 \\ 0.320111343075852 \\ 0.528879610299234 \end{bmatrix}$$

L'effet de secteur 2 :

$$\begin{bmatrix} 0.368823938761308 \\ 1.64231036882394 \\ 0.974251913709116 \end{bmatrix}$$

L'effet de secteur 3 :

$$\begin{bmatrix} 0.187891440501044 \\ 0.459290187891440 \\ 1.62839248434238 \end{bmatrix}$$

□

Exercice 8 À partir de la matrice des transactions intersectorielles donnée dans le tableau ci-dessous pour une économie constituée de trois secteurs :

Vente à / de	Secteur 1	Secteur 2	Secteur 3	Demande des ménages	Ventes totales
Secteur 1	80	160	0	160	400
Secteur 2	40	40	20	300	400
Secteur 3	0	40	10	50	100

(i) Déterminer la matrice A des coefficients techniques de production ;

(ii) Calculer la matrice E des effets directs et indirects, par dollar de demande finale

(iii) Quel est le secteur pour lequel l'augmentation de la demande a le plus grand impact sur l'économie ?

Démonstration. (i) La matrice des coefficients techniques A est

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

(ii)

$$E = \begin{bmatrix} 1.32550335570470 & 0.604026845637584 & 0.134228187919463 \\ 0.151006711409396 & 1.20805369127517 & 0.268456375838926 \\ 0.0167785234899329 & 0.134228187919463 & 1.14093959731544 \end{bmatrix}$$

(iii) Si on change le deuxiem secteur, on aura le plus changement possible. On peut voir ça en pronnons l'addition des entrées dans chaque colonne. Car la deuxième colonne nous donne le plus grand changement, on trouve que le deuxième secteur nous donnera le plus changement.

□