Exercices 4

by Aram Dermenjian

26 septembre 2017

Un exercice marqué du symbole $\star$ est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen. Un exercice marqué du symbole † est trouvé dans les notes du cours.

Exercice 1 Donner la matrice élémentaire $E_5(\mathcal{O}_p)$ pour les opérations élémentaires suivants :

(i) $\mathcal{O}_p = L_1 \leftarrow 2L_1$

(ii) $\mathcal{O}_p = L_3 \leftarrow -L_3$

(iii) $\mathcal{O}_p = L_2 \leftrightarrow L_4$

(iv) $\mathcal{O}_p = L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$

(v) $\mathcal{O}_p = L_2 \leftarrow L_2 + 5L_4$

(vi) $\mathcal{O}_p = L_1 \leftarrow L_1 + xL_5$

Exercice 2 Donner l'opération élémentaire pour les matrices élémentaires suivantes :

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exercice 3 Écrire les matrices suivantes comme un produit de matrices élémentaires :

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Exercice 4 (†) Pour chacune des matrices carrées suivantes, déterminer si elle est inversible ou pas et si elle est inversible, calculer son inverse.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 7 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exercice 5 Les matrices suivantes, sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(iv)$\star$ $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$

(v)$\star$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & \cdots & d_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \\ 0 & d_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ d_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(vi)$\star$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(vii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & b \end{bmatrix}$

(viii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(ix) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(x) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exercice 6 ($\star$) Montrer que si la matrice symétrique A a un inverse, alors A^{-1} est aussi symétrique.

Exercice 7 (†) À partir de la matrice des transactions intersectorielles donnée dans le tableau ci-dessous pour une économie constituée de 3 secteurs :

Vente à de	Secteur 1	Secteur 2	Secteur 3	Demande des ménages	Ventes totales
Secteur 1	20	30	10	40	100
Secteur 2	10	50	40	100	200
Secteur 3	20	80	50	50	200

(i) Calculer la matrice des coefficients techniques A.

(ii) Calculer la matrice $E = (I_3 - A)^{-1}$ des effets.

(iii) Évaluer l'effet d'un accroissement de 1 unité la demande des ménages pour chacun des secteurs sur les ventes totales.

Exercice 8 À partir de la matrice des transactions intersectorielles donnée dans le tableau ci-dessous pour une économie constituée de trois secteurs :

Vente à de	Secteur 1	Secteur 2	Secteur 3	Demande des ménages	Ventes totales
Secteur 1	80	160	0	160	400
Secteur 2	40	40	20	300	400
Secteur 3	0	40	10	50	100

(i) Déterminer la matrice A des coefficients techniques de production ;

(ii) Calculer la matrice E des effets directs et indirects, par dollar de demande finale

(iii) Quel est le secteur pour lequel l'augmentation de la demande a le plus grand impact sur l'économie ?