

Exercices 1 solutions

by Aram Dermenjian

5 septembre 2017

Un exercice marqué du symbole \star est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen. Un exercice marqué du symbole \dagger est trouvé dans les notes du cours.

Exercice 1 Soit la matrice suivante :

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & x & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- (i) Donner le format de A .
- (ii) Donner les valeurs de : a_{12} , a_{31} , a_{23} .

Démonstration. (i) A a un format de 3×4

- (ii) $a_{12} = 2$, $a_{31} = 0$, et $a_{23} = x$.

□

Exercice 2 Écrire les matrices de format 5×5 où les entrées sont données par :

- (i) $a_{ij} = i + j$
- (ii) $b_{ij} = ij$
- (iii) $c_{ij} = i - j$
- (iv) $d_{ij} = i^j$
- (v) $e_{ij} = \text{ppcm}(i, j)$
- (vi) $f_{ij} = (1/4)(3i + j)$
- (vii) $g_{ij} = \max\{i, j\}$

Démonstration. (i) $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$

(ii) $B = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{bmatrix}$

(iii) $C = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(iv) $D = [d_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \\ 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 \\ 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
 \text{(v)} \quad E = [e_{ij}] &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 3 & 12 & 15 \\ 4 & 4 & 12 & 4 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 5 \end{bmatrix} \\
 \text{(vi)} \quad F = [f_{ij}] &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} & \frac{7}{4} & 2 \\ \frac{7}{4} & 2 & \frac{9}{4} & \frac{5}{2} & \frac{11}{4} \\ \frac{5}{2} & \frac{11}{4} & 3 & \frac{13}{4} & \frac{7}{2} \\ \frac{13}{4} & \frac{7}{4} & \frac{15}{4} & 4 & \frac{17}{4} \\ 4 & \frac{17}{4} & \frac{9}{2} & \frac{19}{4} & 5 \end{bmatrix} \\
 \text{(vii)} \quad G = [g_{ij}] &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

□

Exercice 3 Est-ce que les égalités suivantes vraies ou fausses ?

- (i) $0_{2 \times 2} = 0_{3 \times 3}$
- (ii) $[(0-0) \ 0] = [(0-0) \ (0-0)]$
- (iii) $\begin{bmatrix} (1-1) & (x-x) \\ (\alpha-\alpha) & (3-3) \end{bmatrix} = 0_{2 \times 2}$

Démonstration. (i) Non

(ii) Oui

(iii) Oui

□

Exercice 4 Soit les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Déterminer la matrice X telle que $2B + X = 3A$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 X &= 3A - 2B \\
 &= 3 \begin{bmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 18 & 15 & -6 \\ 9 & 21 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 8 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 14 & 15 & -12 \\ 11 & 25 & -5 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

□

Exercice 5 Démontrer la proposition 1.1.

Démonstration. (i) Il faut montrer que $A + B = B + A$:

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}] = B + A$$

(ii) Il faut montrer que $(A + B) + C = A + (B + C)$:

$$(A + B) + C = ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}] = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] \\ = [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}]) = A + (B + C)$$

(iii) Il faut montrer que $A + 0_{m \times n} = 0_{m \times n} + A = A$. Faisons $A + 0_{m \times n} = A$.

$$A + 0_{m \times n} = [a_{ij}] + [0_{ij}] = [a_{ij} + 0_{ij}] = [a_{ij}] = A$$

L'autre égalité est similaire.

(iv) Il faut montrer que $A + (-A) = 0_{m \times n}$.

$$A + (-A) = [a_{ij}] + (-[a_{ij}]) = [a_{ij}] + [-a_{ij}] = [a_{ij} - a_{ij}] = [0_{ij}] = 0_{m \times n}$$

(v) Il faut montrer que $1A = A$:

$$1A = 1[a_{ij}] = [1 \cdot a_{ij}] = [a_{ij}] = A$$

(vi) Il faut montrer que $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$:

$$(\alpha + \beta)A = (\alpha + \beta)[a_{ij}] = [(\alpha + \beta)a_{ij}] = [\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}] = [\alpha a_{ij}] + [\beta a_{ij}] \\ = \alpha[a_{ij}] + \beta[a_{ij}] = \alpha A + \beta A$$

(vii) Il faut montrer que $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$:

$$\alpha(A + B) = \alpha([a_{ij}] + [b_{ij}]) = \alpha[a_{ij} + b_{ij}] = [\alpha(a_{ij} + b_{ij})] = [\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}] \\ = [\alpha a_{ij}] + [\alpha b_{ij}] = \alpha[a_{ij}] + \alpha[b_{ij}] = \alpha A + \alpha B$$

(viii) Il faut montrer que $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$:

$$\alpha(\beta A) = \alpha(\beta[a_{ij}]) = \alpha[\beta a_{ij}] = [\alpha(\beta a_{ij})] = [(\alpha\beta)a_{ij}] \\ = (\alpha\beta)[a_{ij}] = (\alpha\beta)A$$

□

Exercice 6 (†) Soit les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \\ 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -5 \\ 10 & 8 & -9 \end{bmatrix}$$

Indiquer si chacune des opérations suivantes est bien définie et effectuer ce calcul dans le cas où l'opération est bien définie :

- | | |
|----------------|-----------------------|
| (i) BAC | (v) $A(B + 3C)$ |
| (ii) B^2A | (vi) $(B + 3C)A$ |
| (iii) $(BC)^2$ | (vii) $A^T(B + 5C^T)$ |
| (iv) B^2C^2 | (viii) $A + A^T$ |

Démonstration. (i) Pas bien définie (problème quand on fait la multiplication avec C).

$$(ii) \begin{bmatrix} 386 & 111 & -190 & 51 \\ -189 & 9 & 32 & 10 \\ 575 & 38 & -142 & -7 \end{bmatrix}$$

$$(iii) (BC)^2 = BCBC = \begin{bmatrix} 868 & 3696 & -3320 \\ -1464 & -286 & 565 \\ 4476 & 358 & -1289 \end{bmatrix}$$

$$(iv) B^2C^2 = BBCC = \begin{bmatrix} 1898 & -950 & 410 \\ 64 & 782 & -805 \\ 634 & -2196 & 2031 \end{bmatrix}$$

(v) Pas bien définie (problème quand on fait la multiplication avec A)

(vi)

$$\begin{aligned} (B+3C)A &= \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \\ 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -5 \\ 10 & 8 & -9 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \\ 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & -3 & 0 \\ 6 & 18 & -15 \\ 30 & 24 & -27 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 17 & -4 & 5 \\ 2 & 19 & -15 \\ 40 & 18 & -26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 89 & 37 & -33 & 3 \\ -196 & 55 & 74 & -23 \\ -192 & 190 & 32 & -10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(vii)

$$\begin{aligned} A^T(B+5C^T) &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \\ 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -5 \\ 10 & 8 & -9 \end{bmatrix} \right)^T \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \\ 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 5 & 2 & 10 \\ -1 & 6 & 8 \\ 0 & -5 & -9 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \\ 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 25 & 10 & 50 \\ -5 & 30 & 40 \\ 0 & -25 & -45 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 27 & 9 & 55 \\ -9 & 31 & 40 \\ 10 & -31 & -44 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 169 & -354 & -398 \\ 52 & 120 & 293 \\ -63 & 115 & 105 \\ 8 & -31 & -36 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(viii) Pas bien définie. □

Exercice 7 Faire les multiplications suivantes :

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(iii) (I_3) \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$(iv) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(v) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

$$(vi) \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix}$$

Démonstration. (i) $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

$$(ii) \begin{bmatrix} -4 & -8 & -12 & -16 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$(iv) \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(v) \begin{bmatrix} ax + bz & bw + ay \\ cx + dz & dw + cy \end{bmatrix}$$

$$(vi) \begin{bmatrix} ap - bq & bp + aq \\ -bp - aq & ap - bq \end{bmatrix}$$

□

Exercice 8 Soit les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Vérifier que $AB = BA = 0$, $AC = A$, et $CA = C$.

Exercice 9 Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer A^2 et vérifier que $A^2A = AA^2 = I_3$.

Démonstration.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Exercice 10 Démontrer la proposition 1.2.

Démonstration.

(i) Il faut montrer que $(AB)C = A(BC)$:

$$\begin{aligned} (AB)C &= ([a_{ij}] [b_{ij}]) [c_{ij}] \\ &= \left[\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right] [c_{ij}] \\ &= \left[\sum_{\ell=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{k\ell} \right) c_{\ell j} \right] \\ &= \left[\sum_{\ell=1}^m \sum_{k=1}^n ((a_{ik} b_{k\ell}) c_{\ell j}) \right] \\ &= \left[\sum_{\ell=1}^m \sum_{k=1}^n (a_{ik} (b_{k\ell} c_{\ell j})) \right] \\ &= \left[\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^m (a_{ik} (b_{k\ell} c_{\ell j})) \right] \\ &= \left[\sum_{k=1}^n a_{ik} \left(\sum_{\ell=1}^m b_{k\ell} c_{\ell j} \right) \right] \\ &= [a_{ij}] \left[\sum_{\ell=1}^m b_{i\ell} c_{\ell j} \right] \\ &= [a_{ij}] ([b_{ij}] [c_{ij}]) = A(BC) \end{aligned}$$

(ii) Il faut montrer que $AI_n = I_m A = A$. Faisons $AI_n = A$:

$$AI_n = [a_{ij}] [b_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right]$$

Notons que $b_{kj} = 0$ sauf quand $k = j$. Donc

$$\left[\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right] = [a_{ij}] = A$$

(iii) Il faut montrer que $A0_{n \times r} = 0_{m \times r}$ et que $0_{s \times m} A = 0_{s \times n}$. Faisons $A0_{n \times r} = 0_{m \times r}$:

$$A0_{n \times r} = [a_{ij}] [0_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^n a_{ik} 0_{kj} \right] = [0_{ij}] = 0_{m \times r}.$$

On a que le format est $m \times r$ car A est de format $m \times n$ et $0_{n \times r}$ est de format $n \times r$. Alors le produit aura un format de $m \times r$.

(iv) Il faut montrer que $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

$$\begin{aligned}\alpha(AB) &= \alpha([a_{ij}][b_{ij}]) = \alpha\left[\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\right] = \left[\alpha\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\right] = \left[\sum_{k=1}^n \alpha a_{ik}b_{kj}\right] \\ &= [\alpha a_{ij}][b_{ij}] = (\alpha [a_{ij}])[b_{ij}] = (\alpha A)B\end{aligned}$$

<++>

(v) Il faut montrer que $A(B + B') = AB + AB'$ et $(B + B')C = BC + B'C$.
Faisons $A(B + B') = AB + AB'$:

$$\begin{aligned}A(B + B') &= [a_{ij}]([b_{ij}] + [b'_{ij}]) = [a_{ij}][b_{ij} + b'_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^n a_{ik}(b_{kj} + b'_{kj})\right] \\ &= \left[\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} + a_{ik}b'_{kj}\right] = \left[\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik}b'_{kj}\right] \\ &= \left[\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\right] + \left[\sum_{k=1}^n a_{ik}b'_{kj}\right] \\ &= [a_{ij}][b_{ij}] + [a_{ij}][b'_{ij}] = AB + AB'\end{aligned}$$

□

Exercice 11 (†) Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer chacune des matrices suivantes : (a) A^2 , (b) A^3 , (c) A^4 , (d) A^{100} , (e)* $(I_4 + A)^8$.

Démonstration. (a) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $A^{100} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$(e) (I_4 + A)^8 = \begin{bmatrix} 1 & 16 & 112 & 448 \\ 0 & 1 & 16 & 112 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Exercice 12 Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Montrer que $A^2 - 5A - 2A^0 = 0_{2 \times 2}$ et que $A^3 - 27A - 10A^0 = 0_{2 \times 2}$.

Démonstration. On peut voir que $A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$ et alors $A^3 = \begin{bmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{bmatrix}$.

Alors on voit que

$$\begin{aligned} A^2 - 5A - 2A^0 &= \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} A^3 - 27A - 10A^0 &= \begin{bmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{bmatrix} - 27 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 10 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 27 & 54 \\ 81 & 108 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

Exercice 13 Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calculer $3(A - I_2)(A - 2I_2)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} 3(A - I_2)(A - 2I_2) &= 3 \left(\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= 3 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

Exercice 14 Soit une matrice A de format $m \times (m+5)$ et B de format $n \times (11-n)$. Supposons que AB et BA sont bien définies. Quels sont les valeurs de n et m ?

Démonstration. Parce que AB est bien définie, on sait que $(m+5) = n$. Parce que BA est bien définie, on sait que $m = 11 - n$. Alors on a que $m = 11 - (m+5)$, d'où $2m = 6$ et $m = 3$. Et finalement $n = 8$. □

Exercice 15 (†) Soit une matrice A .

- (i) Vérifier que la matrice $A^T A$ est une matrice symétrique.
 (ii) Dans le cas où A est une matrice de format 2×2 , calculer $A^T A$.

Démonstration. (i) Si $A = [a_{ij}]$, par définition $A^T = [b_{ij}] = [a_{ji}]$. Par notre formule $A^T A = [c_{ij}]$ où $c_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj}$. Il faut montrer que $c_{ij} = c_{ji}$.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{kj} a_{ki} = \sum_{k=1}^n b_{jk} a_{ki} = c_{ji}$$

- (ii) Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ on a $A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

qui est symétrique. □

Exercice 16 Soit les matrices de Ex 2. Lequelles sont symétriques? Antisymétriques?

Matrice	symétrique	antisymétrique
A	oui	non
B	oui	non
C	non	oui
D	non	non
E	oui	non
F	non	non
G	oui	non

Démonstration. □

Exercice 17 Soit une matrice carrée A , montrer que $A + A^T$ est symétrique.

Démonstration. Soit $A = [a_{ij}]$. Prenons $A + A^T = [b_{ij}]$. Il faut montrer que $b_{ij} = b_{ji}$. On a que $b_{ij} = a_{ij} + a_{ji} = a_{ji} + a_{ij} = b_{ji}$. □

Exercice 18 Montrer que si A est symétrique ou antisymétrique alors $AA^T = A^T A$ et A^2 est symétrique

Démonstration. Soit A symétrique ou antrisyométrique. Alors $A = \pm A^T$. D'où $AA^T = A(\pm A) = (\pm A)A = A^T A$.

Aussi, prenons $A^2 = [b_{ij}]$. Il faut montrer que $b_{ij} = b_{ji}$. Car $A = \pm A^T$ on a que $a_{ij} = \pm a_{ji}$ pour tout i, j .

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{kj} a_{ik} = \sum_{k=1}^n (\pm a_{jk})(\pm a_{ki}) = \sum_{k=1}^n a_{jk} a_{ki} = b_{ji}$$

□

Exercice 19 (★) Montrer la proposition 1.3.d :

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Démonstration. Soit $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$. On note $A^T = [a_{ij}^T] = [a_{ji}]$ et $B^T = [b_{ij}^T] = [b_{ji}]$. On a que $AB = [c_{ij}] = [\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}]$. Alors, les entrées de $(AB)^T$ sont $c_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki}$. Donc $(AB)^T = [\sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki}]$.

Par contre une entrée de $B^T A^T$ est d_{ij} tel que $d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}^T a_{kj}^T$. Car $b_{ik}^T = b_{ki}$ et $a_{kj}^T = a_{jk}$ on a que $d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ki}a_{jk}$. Ensuite $b_{ki}a_{jk} = a_{jk}b_{ki}$ implique que

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ki}a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki} = c_{ij}.$$

Donc, $(AB)^T = B^T A^T$. □

Exercice 20 (★) Montrez que si $\alpha A = 0_{m \times n}$ alors soit $\alpha = 0$ ou $A = 0_{m \times n}$.

Démonstration. Supposons que $\alpha A = 0_{m \times n}$. Alors $\alpha A = [\alpha a_{ij}] = [0]$. Donc, $\alpha a_{ij} = 0$ pour tout i, j .

Alors on a que soit $\alpha = 0$ ou soit $a_{ij} = 0$. Si $\alpha = 0$ on est finit. Si $\alpha \neq 0$ ça force que tout $a_{ij} = 0$ pour tout i, j . Donc $A = 0_{m \times n}$. □

Exercice 21 (★) Soit deux matrices diagonales A et B de même ordre. Montrer que $AB = BA$.

Démonstration. Tout à bord, il faut voir que, car A et B sont diagonales, $a_{ij} = b_{ij} = 0$ quand $i \neq j$. Rappelons que $AB = [\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}]$. Or $a_{ik} = 0$ si $i \neq k$ et $b_{kj} = 0$ si $k \neq j$ on a des valeurs non nulles seulement si $i = k$ et $k = j$. Donc on peut changer les indices sans changer les valeurs $[\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}] = [\sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}] = BA$. □

Exercice 22 (★) Soit une matrice A et une matrice diagonale D avec des entrées non-negatives, montrer que $AD^p = D^p A$ si et seulement si $AD = DA$.

Démonstration. Soit

$$A = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1j} & \cdots & m_{1a} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2j} & \cdots & m_{2a} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ m_{i1} & m_{i2} & \cdots & m_{ij} & \cdots & m_{ia} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nj} & \cdots & m_{na} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

Si $AD = DA$ alors $AD^p = DAD^{p-1} = \cdots = D^{p-1}AD = D^p A$.

Si $AD^p = D^p A$ on a que

$$AD^p = \begin{bmatrix} a_{11}d_1^p & a_{12}d_2^p & a_{13}d_3^p & \cdots & a_{1n}d_n^p \\ a_{21}d_1^p & a_{22}d_2^p & a_{23}d_3^p & \cdots & a_{2n}d_n^p \\ a_{31}d_1^p & a_{32}d_2^p & a_{33}d_3^p & \cdots & a_{3n}d_n^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}d_1^p & a_{m2}d_2^p & a_{m3}d_3^p & \cdots & a_{mn}d_n^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}d_1^p & a_{12}d_1^p & a_{13}d_1^p & \cdots & a_{1n}d_1^p \\ a_{21}d_2^p & a_{22}d_2^p & a_{23}d_2^p & \cdots & a_{2n}d_2^p \\ a_{31}d_3^p & a_{32}d_3^p & a_{33}d_3^p & \cdots & a_{3n}d_3^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}d_m^p & a_{m2}d_m^p & a_{m3}d_m^p & \cdots & a_{mn}d_n^p \end{bmatrix} = D^p A$$

C'est facile à voir qu'on doit avoir $m = n$. Alors A et D sont des matrices carrées d'ordre n .

Ensuite, on peut voir que $a_{ij}d_i^p = a_{ij}d_j^p$ par notre égalité. Alors soit $a_{ij} = a_{ji} = 0$ ou soit $d_i^p = d_j^p$ pour n'importe quel i et j . Car les d_i n'ont pas negatives, on a que, si $d_i^p = d_j^p$ alors $d_i = d_j$ en faissent le n -ième racine de chaque coté. Donc, $a_{ij}d_i = a_{ij}d_j$ pour tout i et j . Alors, $AD = DA$. □

Exercice 23 (†) Soit les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 7 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- (i) Vérifier que la matrice A n'a pas d'inverse B à gauche.
- (ii) Vérifier que la matrice C est un inverse à droite de A .
- (iii) Vérifier que la matrice ci-dessous est aussi un inverse à droite de A pour tous les scalaires α, β, γ et δ :

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\gamma + \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2} \\ & 3\alpha & & 3\gamma + 1 \\ & & \alpha & \gamma \\ & & \beta & \delta \end{bmatrix}$$

La matrice A a une infinité d'inverse à droite et aucun inverse à gauche.

Démonstration. (i) Supposons qu'il existe une telle matrice B . Alors $BA = I_4$. Soit $B = [b_{ij}]$.

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2a & a+b & -3b & -a \\ 2c & c+d & -3d & -c \\ 2e & e+f & -3f & -e \\ 2g & g+h & -3h & -g \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4 \end{aligned}$$

Ensuite, on voit que $2a = 1$ et $-a = 0$ pour la première et la dernière entrées. Alors a est à la fois 0 et 1. Ceci n'est pas possible, donc il n'existe pas un inverse à gauche.

- (ii) C est un inverse à droite de A si et seulement si $AC = I_2$. On a

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 7 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Donc C est un inverse à droite de A .

- (iii) On a

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\gamma + \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2} \\ & 3\alpha & & 3\gamma + 1 \\ & & \alpha & \gamma \\ & & \beta & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Donc, la matrice est un inverse à droite de A . □

Exercice 24 (★) Montrer par induction que si A est une matrice carrée et si $AB = \lambda B$ pour λ un scalaire et B une matrice, alors $A^p B = \lambda^p B$ pour tout entier positif p .

Démonstration. Soit A une matrice carrée tel que $AB = \lambda B$. Supposons que $p = 1$. Alors on a bien que $A^1 B = \lambda^1 B$. Ensuite, supposons que on a que $A^p B = \lambda^p B$ pour $p \geq 1$.

$$A^{p+1} B = A(\lambda^p B) = (\lambda^p A) B = \lambda^p (AB) = \lambda^p (\lambda B) = \lambda^{p+1} B$$

□

Exercice 25 Trouver l'inverse de la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Démonstration.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□