

Exercices 12

by Aram Dermenjian

5 décembre 2017

Un exercice marqué du symbole \star est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen. Un exercice marqué du symbole \dagger est trouvé dans les notes du cours.

Exercice 1 (\dagger) Considérons $V = \mathbb{R}_\ell^4$, la base $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ où

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= [2 \ 1 \ 0 \ -1], \vec{u}_2 = [0 \ -1 \ 2 \ 1], \\ \vec{u}_3 &= [1 \ 0 \ -3 \ 1] \text{ et } \vec{u}_4 = [0 \ 2 \ -1 \ 1]\end{aligned}$$

et la base standard $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$, où

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= [1 \ 0 \ 0 \ 0], \vec{v}_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0], \\ \vec{v}_3 &= [0 \ 0 \ 1 \ 0] \text{ et } \vec{v}_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]\end{aligned}$$

- (i) Déterminer la matrice de passage ${}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'}$ de la base \mathcal{B}' à la base \mathcal{B} .
- (ii) Déterminer la matrice de passage ${}_{\mathcal{B}'}[I]_{\mathcal{B}}$ de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' .
- (iii) Vérifier que les deux matrices ${}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'}$ et ${}_{\mathcal{B}'}[I]_{\mathcal{B}}$ sont l'inverse l'une de l'autre.

Exercice 2 (\dagger) Considérons $V = \mathbb{R}_\ell^3$, la base $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, où

$$\vec{u}_1 = [-1 \ 1 \ -1], \vec{u}_2 = [0 \ 2 \ -1], \vec{u}_3 = [-1 \ 0 \ -2]$$

la base standard $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, où

$$\vec{v}_1 = [1 \ 0 \ 0], \vec{v}_2 = [0 \ 1 \ 0], \vec{v}_3 = [0 \ 0 \ 1]$$

et la base $\mathcal{B}'' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$, où

$$\vec{w}_1 = [2 \ -1 \ 1], \vec{w}_2 = [1 \ -1 \ 0], \vec{w}_3 = [1 \ 1 \ 1]$$

Vous pouvez prendre pour acquis qu'il s'agit bien de trois bases de $V = \mathbb{R}_\ell^3$.

- (i) Déterminer la matrice de passage ${}_{\mathcal{B}'}[I]_{\mathcal{B}}$ de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' .
- (ii) Déterminer la matrice de passage ${}_{\mathcal{B}''}[I]_{\mathcal{B}'}$ de la base \mathcal{B}' à la base \mathcal{B}'' .
- (iii) Déterminer la matrice de passage ${}_{\mathcal{B}''}[I]_{\mathcal{B}}$ de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}'' .
- (iv) Soit le vecteur $\vec{u} = [3 \ -1 \ 4]$. Déterminer les matrices de coordonnées $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$, $[\vec{u}]_{\mathcal{B}'}$ et $[\vec{u}]_{\mathcal{B}''}$ de \vec{u} par rapport aux bases \mathcal{B} , \mathcal{B}' et \mathcal{B}'' respectivement.

Exercice 3 (\dagger) Indiquer pour chacune des fonctions suivantes s'il s'agit d'une transformation linéaire ou pas

- (i) $T_1 : \mathbb{R}_\ell^3 \rightarrow \mathbb{R}_\ell^2$ définie par

$$T_1([x \ y \ z]) = [(3x - y + 2z) \ (x - y + z)]$$

- (ii) $T_2 : \mathbb{R}_\ell^3 \rightarrow \mathbb{R}_\ell^3$ définie par

$$T_2([x \ y \ z]) = [(x + 2y + z^2) \ (2x + 3y + 1) \ (x - y)]$$

- (iii) $T_3 : \mathbb{R}_\ell^2 \rightarrow \mathbb{R}_\ell^3$ définie par

$$T_3([x \ y]) = [(x + 2y) \ (x - 4y) \ (5x - y)]$$

Exercice 4 Soit la transformation linéaire $T : \mathbb{R}_\ell^3 \rightarrow \mathbb{R}_\ell^3$ définie par

$$T([x \ y \ z]) = [(x - 2y + z) \ (3x - y + 2z) \ (x + y - z)]$$

et les bases \mathcal{B} , \mathcal{B}' , et \mathcal{B}'' de l'exercice 2.

- (i) Déterminer la matrice de la transformation linéaire ${}_{\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}}$ de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' .
- (ii) Déterminer la matrice de la transformation linéaire ${}_{\mathcal{B}''}[T]_{\mathcal{B}'}$ de la base \mathcal{B}' à la base \mathcal{B}'' .
- (iii) Déterminer la matrice de la transformation linéaire ${}_{\mathcal{B}''}[T]_{\mathcal{B}}$ de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}'' .
- (iv) Soit le vecteur $\vec{u} = [3 \ -1 \ 4]$. Déterminer les matrices de coordonnées $[T(\vec{u})]_{\mathcal{B}'}$ et $[T(\vec{u})]_{\mathcal{B}''}$ de \vec{u} par rapport aux bases \mathcal{B} , \mathcal{B}' et \mathcal{B}'' respectivement.