Exercices

by Aram Dermenjian

5 septembre 2017

Un exercice marqué du symbole $\star$ est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen.

1. Exercises 1

Exercice 1 Soit la matrice suivante :

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & x & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(i) Donner le format de A.

(ii) Donner les valeurs de : a_{12}, a_{31}, a_{23}.

Exercice 2 Écrire les matrices de format 5×5 où les entrées sont données par :

(i) $a_{ij} = i + j$

(ii) $b_{ij} = ij$

(iii) $c_{ij} = i - j$

(iv) $d_{ij} = i^j$

(v) $e_{ij} = \text{ppcm}(i, j)$

(vi) $f_{ij} = (1/4)(3i + j)$

(vii) $g_{ij} = \max\{i, j\}$

Exercice 3 Est-ce que les égalités suivantes vraies ou fausses ?

(i) $0_{2\times 2} = 0_{3\times 3}$

(ii) $\begin{bmatrix}(0-0) & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(0-0) & (0-0)\end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix}(1-1) & (x-x) \\ (\alpha-\alpha) & (3-3)\end{bmatrix} = 0_{2\times 2}$

Exercice 4 Soit les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Déterminer la matrice X telle que $2B + X = 3A$.

Exercice 5 Démontrer la proposition 1.1.

Exercice 6 (†) Soit les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \\ 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -5 \\ 10 & 8 & -9 \end{bmatrix}$$

Indiquer si chacune des opérations suivantes est bien définie et effectuer ce calcul dans le cas où l'opération est bien définie :

(i) BAC

(ii) B^2A

(iii) $(BC)^2$

(iv) B^2C^2

(v) $A(B + 3C)$

(vi) $(B + 3C)A$

(vii) $A^T(B + 5C^T)$

(viii) $A + A^T$

Exercice 7 Faire les multiplications suivantes :

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

(iii) $(I_3) \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix}$

Exercice 8 Soit les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Vérifier que $AB = BA = 0$, $AC = A$, et $CA = C$.

Exercice 9 Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer A^2 et vérifier que $A^2A = AA^2 = I_3$.

Exercice 10 Démontrer la proposition 1.2.

Exercice 11 (†) Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer chacune des matrices suivantes : (a) A^2, (b) A^3, (c) A^4, (d) A^{100}, (e)* $(I_4 + A)^8$.

Exercice 12 Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Montrer que $A^2 - 5A - 2A^0 = 0_{2\times 2}$ et que $A^3 - 27A - 10A^0 = 0_{2\times 2}$.

Exercice 13 Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calculer $3(A - I_2)(A - 2I_2)$.

Exercice 14 Soit une matrice A de format $m \times (m+5)$ et B de format $n \times (11-n)$. Supposons que AB et BA sont bien définies. Quels sont les valeurs de n et m ?

Exercice 15 (†) Soit une matrice A.

(i) Vérifier que la matrice $A^T A$ est une matrice symétrique.

(ii) Dans le cas où A est une matrice de format 2×2, calculer $A^T A$.

Exercice 16 Soit les matrices de Ex 2. Lequelles sont symétriques ? Antisymétriques ?

Exercice 17 Soit une matrice carrée A, montrer que $A + A^T$ est symétrique.

Exercice 18 Montrer que si A est symétrique ou antisymétrique alors $AA^T = A^T A$ et A^2 est symétrique

Exercice 19 ($\star$) Montrer la proposition 1.3.d :

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Exercice 20 ($\star$) Montrez que si $\alpha A = 0$ alors soit $\alpha = 0$ ou $A = 0$.

Exercice 21 ($\star$) Soit deux matrices diagonales A et B de même ordre. Montrer que $AB = BA$.

Exercice 22 ($\star$) Soit une matrice A et une matrice diagonale D, montrer que $AD^p = D^p A$ si et seulement si $AD = DA$.

Exercice 23 (†) Soit les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 7 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(i) Vérifier que la matrice A n'a pas d'inverse B à gauche.

(ii) Vérifier que la matrice C est un inverse à droite de A.

(iii) Vérifier que la matrice ci-dessous est aussi un inverse à droite de A pour tous les scalaires α, β, γ et δ :

$$\begin{bmatrix} (1-3\alpha+\beta)/2 & (-3\gamma+\delta-1)/2 \\ 3\alpha & (1+3\gamma) \\ \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$$

La matrice A a une infinité d'inverse à droite et aucun inverse à gauche.

Exercice 24 ($\star$) Montrer par induction que si A est une matrice carée et si $AB = \lambda B$ pour λ un scalaire et B une matrice, alors $A^p B = \lambda^p B$ pour tout entier positif p.

Exercice 25 Trouver l'inverse de la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$