

3. SEMAINE 3 : 24 SEPTEMBRE 2018

3.1. Partie 1.

3.1.1. Rappel.

3.1.2. *Changement de variable (§2.3 ou §2.2).* Soit deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$. Une fonction _____ est une fonction de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Rappelons que le _____ d'un polynôme est le degré le plus élevé de ses termes. Si le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur, on dit que la fonction est une _____. Sinon, c'est une _____.

Exemple 3.1 Lequelles sont propres ?

$$\frac{x^7 - x^6 + 2}{x^5 - 97} \quad \frac{x^3 + 1}{x^3 + 2}$$

$$\frac{x^2 + 99001}{x^3} \quad \frac{(x + 1)(x^2 - 3)^3}{(x - 8)(x^3 + 2)(x^2 + x - 1)^2}$$

Si notre fraction n'est pas propre, on fait la division.

Exemple 3.2 Soit

$$P(x) = 2x^6 - x^5 - x^4 + 3x - 3 \quad Q(x) = x^4 - x^3 \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^6 - x^5 - x^4 + 3x - 3}{x^4 - x^3}$$

une fraction impropre. Faisons la division. Alors

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^6 - x^5 - x^4 + 3x - 3}{x^4 - x^3} = 2x^2 + x + \frac{3x - 3}{x^4 - x^3} = 2x^2 + x + \frac{3(x - 1)}{x^3(x - 1)} = 2x^2 + x + \frac{3}{x^3}$$

Et pourquoi on a fait ça ? Pour avoir une fonction plus facile pour faire l'intégration :

Mais, on a encore un problème. Qu'est-ce qu'on peut faire avec une intégrale comme : _____ ?

Avec les choses qu'on a vu, on a aucun moyen de faire cette intégrale. Heureusement, on peut appliquer une stratégie qui s'appelle _____.

On aimerait avoir quelque chose plus simple. Ça serait cool si on peut changer notre intégrale pour être : $\int x^{7/9} dx$ parce que là, on sait ce qu'il faut faire. Alors, on va essayer de faire ça.

Mettons $u = 3x+2$. Alors, on a bien $\int u^{7/9} dx$. C'est quoi le problème? _____

Alors on va faire :

$$u = 3x + 2 \Rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$$

et alors

$$\begin{aligned} \int (3x + 2)^{7/9} dx &= \underline{\hspace{2cm}} \\ &= \frac{1}{3} \int u^{7/9} du \\ &= \underline{\hspace{2cm}} \\ &= \frac{9}{3 \cdot 16} u^{16/9} + c \\ &= \frac{3}{16} (3x + 2)^{16/9} + c \end{aligned}$$

Et voilà, c'est fait ! Qu'est-ce qu'on a fait ?

- (1) _____
- (2) _____
- (3) _____
- (4) _____
- (5) _____

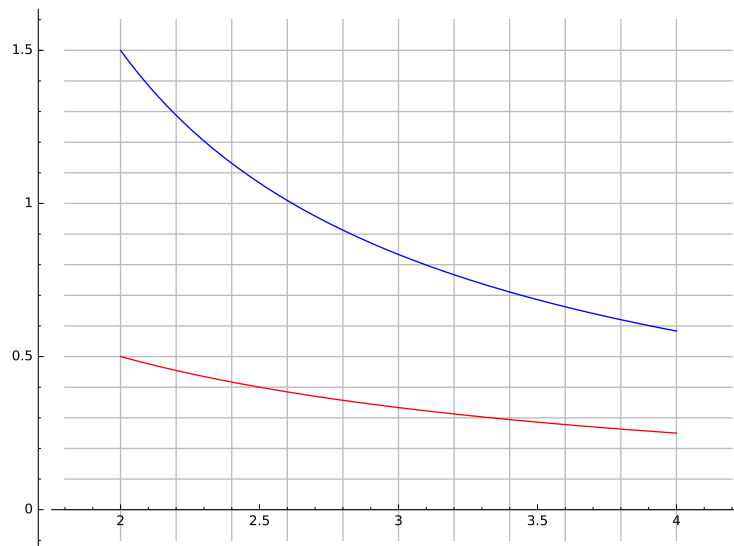
À ton tour, essaye-le. Trouver l'intégrale indéfinie : $\int x(7x^2 - 8)^{16/7} dx$

Mais on a fait tout ça pour pouvoir calculer des intégrales définies ! Alors, qu'est-ce que passe pour ça ?

Trouvons l'intégrale définie : $\int_2^4 \frac{2x-1}{x^2-x} dx$ Les changements de variable : Alors

Mais il y a encore un nouveau problème! _____.

Regardons les deux fonctions ensemble. Celui de x en haut (bleue) et celui de u en bas (rouge).



Alors, on va faire comme on a fait avec le dx .

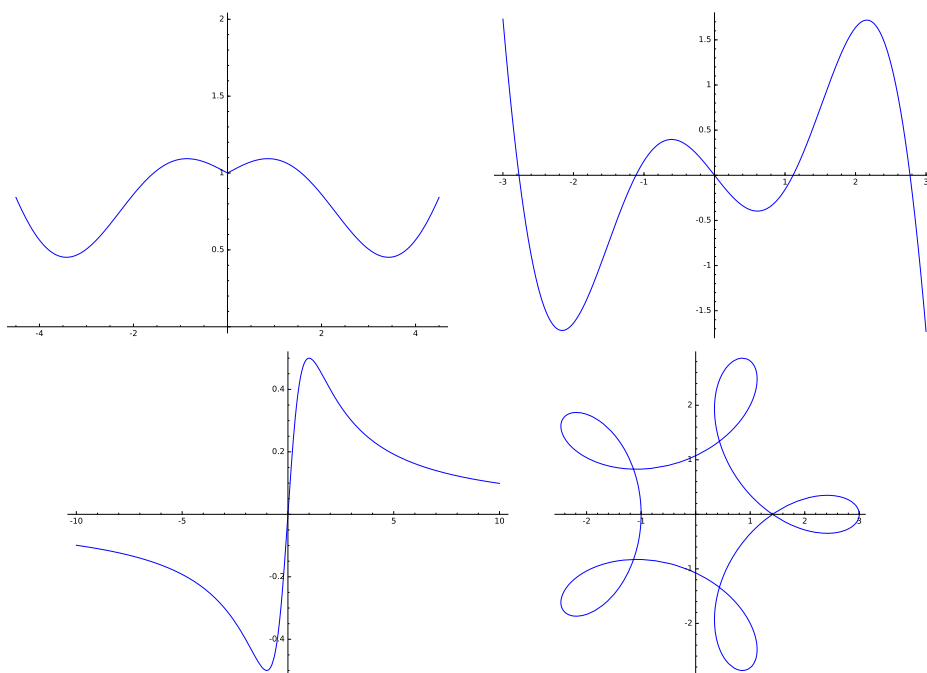
Théorème 3.3 (Changement de variable dans une intégrale définie) *Si $g'(x)$ est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et si $f(x)$ est une fonction continue qui admet _____ sur l'intervalle couvrant les valeurs $g(a)$ et $g(b)$, alors*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

Essayons quelque chose plus fun : $\int \cotan(ax) dx$ pour $a \in \mathbb{R}$.

3.2. Partie 2.

3.2.1. *Fonctions paires et impaires (§2.3.3 ou -).* On dit qu'une fonction $f(x)$ est _____ si $f(-x) = f(x)$ et _____ si $f(-x) = -f(x)$ Des exemples :



Théorème 3.4 (Propriétés des fonctions paires et impaires) *Si $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont des fonctions paires et si $g_1(x)$ et $g_2(x)$ sont des fonctions impaires, alors, là où les opérations sont définies :*

- (1) $f_1(x)f_2(x)$ et $g_1(x)g_2(x)$ sont fonctions _____.
- (2) $f_1(x)g_1(x)$ est une fonction _____.
- (3) $\int_{-a}^a f_1(x) dx =$ _____
- (4) $\int_{-a}^a g_1(x) dx =$ _____

Démonstration. On va montrer que

$$\int_{-a}^a f_1(x) dx = 2 \int_0^a f_1(x) dx$$

Soit une fonction paire $f(x)$. Par définition $f(-x) = f(x)$.

$$\begin{aligned}
 \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\
 &= \underline{\hspace{10cm}} \\
 &= - \int_a^0 f(u) du + \int_0^a f(x) dx \\
 &= \int_0^a f(u) du + \int_0^a f(x) dx \\
 &= \underline{\hspace{10cm}} \\
 &= 2 \int_0^a f(x) dx
 \end{aligned}$$

□

Exemple 3.5

$$\int_{-a}^a x^2 \sin(x) - x^7 + x \cos(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

3.2.2. *Complétion du carré (§2.3.4 ou -)*. On va regarder les trois intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \underline{\hspace{4cm}} \\
 \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx &= \underline{\hspace{4cm}} \\
 \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \underline{\hspace{4cm}}
 \end{aligned}$$

Ils ont tous la forme : $\underline{\hspace{4cm}}$. Alors, on va trouver une façon de changer un polynôme $ax^2 + bx + c$ en un polynôme de la forme $\pm x^2 \pm 1$. On appelle ça : $\underline{\hspace{4cm}}$. Cela consiste à transformer notre polynôme dans la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\
 &= \underline{\hspace{10cm}} \\
 &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right)
 \end{aligned}$$

Mais, pour vrai, c'est trop difficile de mémoriser cette formule. La seule partie qu'il faut vraiment se rappeler est comment choisir notre $\frac{b^2}{4a^2}$. Et pour ça, c'est plus simple de commencer avec un exemple très facile :

Exemple 3.6

$$x^2 + bx$$

Ici, on a déjà que $a = 1$ et $c = 0$, mais comme j'ai dit, on ne va pas regarder ça pour l'instant. On veut changer $x^2 + bx$ en "un carré".

Donc, on va faire l'inverse. Supposons qu'on a :

$$(x + d)^2 = \underline{\hspace{4cm}}$$

Ainsi, dans l'autre sens, il faut diviser notre b par 2 ce qui nous donne :

$$x^2 + bx =$$

Exemple 3.7 Essayons avec des exemples réels :

$$x^2 + 8x = x^2 + 8x + 4^2 - 4^2 = (x + 4)^2 - 4^2$$

$$x^2 - 7x = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$2x^2 + 4x = \underline{\hspace{4cm}}$$

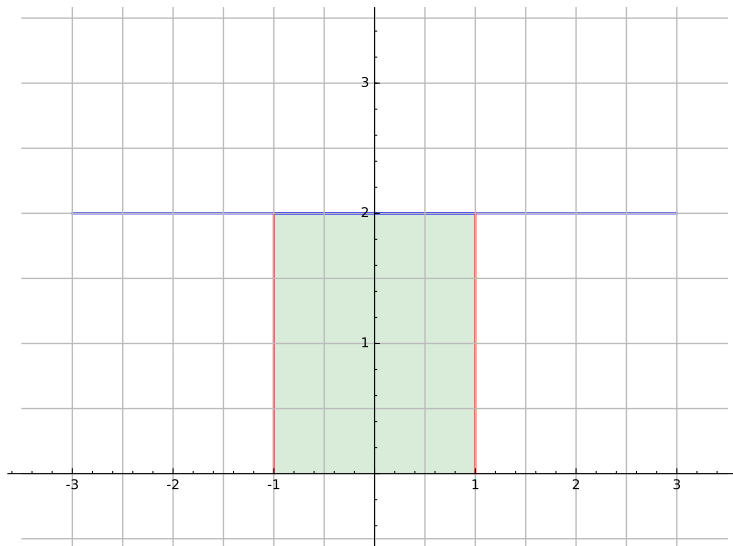
$$3x^2 - 5x = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$x^2 + 4x - 1 = \underline{\hspace{4cm}}$$

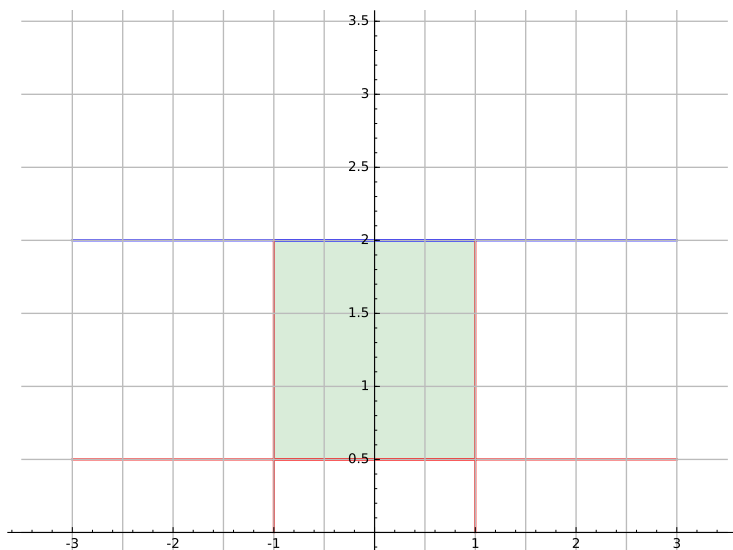
Alors, maintenant, on peut faire les intégrations qu'on voulait au début :

$$\int \frac{x + 2}{\sqrt{-2x^2 - 12x - 10}} dx$$

3.2.3. *L'aire d'une surface plane (§3.1 ou §3.4).* Disons qu'on veut l'aire d'une surface comme une carrée



On veut utiliser l'intégration pour trouver l'aire. Depuis le début du cours, on sait déjà que $\int_{-1}^1 2dx$ va nous donner l'aire. Mais qu'est-ce qu'on peut faire si on change la taille de notre carrée ?



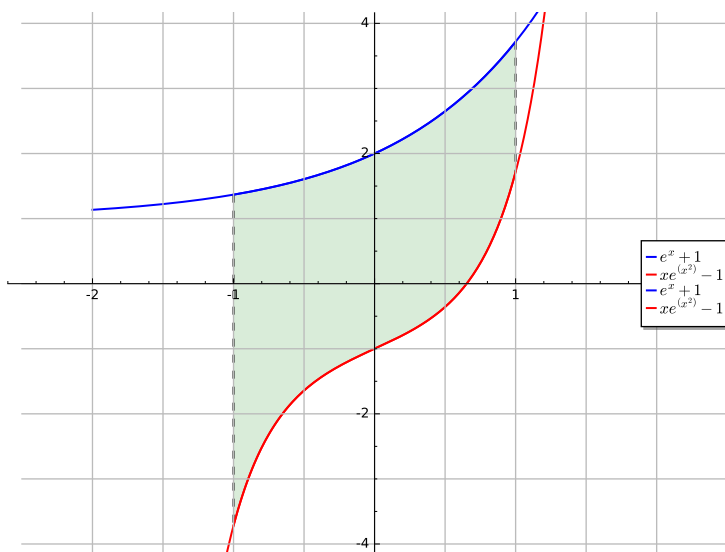
On peut le voir comme l'aire de la fonction en haut moins l'aire de la fonction en bas. C'est-à-dire

$$\int_{-1}^1 \left(2 - \frac{1}{2}\right) dx =$$

$$= 3$$

Mais ça c'était trop facile. Donc prenons quelque chose de plus difficile.

Exemple 3.8 C'est quoi l'aire entre ces deux courbes ?



En bleu on a la fonction $e^x + 1$ et en rouge on a la fonction $xe^x - 1$.

On va faire la même chose. On trouve l'aire sous la courbe du haut et on soustrait l'aire sous la courbe du bas. Donc, on a

$$\int_{-1}^1 e^x dx = e^x \Big|_{-1}^1 = e^1 - e^{-1}$$

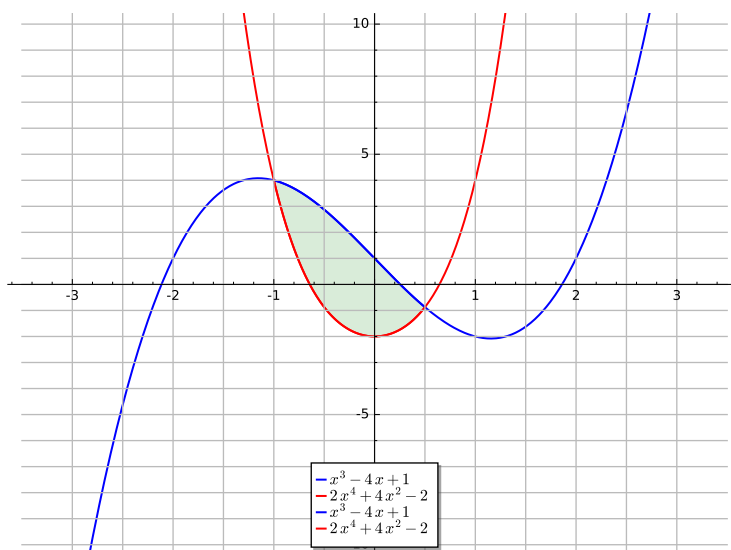
$$\int_{-1}^1 2dx = 2x \Big|_{-1}^1 = 2 \cdot 1 - 2 \cdot -1 = 2 + 2 = 4$$

$$\int_{-1}^1 xe^{(x^2)} dx =$$

$$= 0$$

Alors l'aire est $e^1 - e^{-1} + 4$.

Exemple 3.9 Faisons un autre exemple



Donc en bleue on a $x^3 - 4x + 1$ et en rouge on a $2x^4 + 4x^2 - 2$. Si on veut l'aire du milieu il faut premièrement trouver où ces deux courbes intersectent.

Elles intersectent quand _____.

Donc il faut trouver les racines de $2x^4 - x^3 + 4x^2 + 4x - 3$.

Ainsi, il faut utiliser les _____ : p/q est une racine d'un polynôme $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ si $p|a_0$ et $q|a_n$. Alors, on sait que les racines doivent être dans l'ensemble : $\{\pm 3, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{2}\}$.

Si on regarde notre image, ça nous donne des indices. Donc, on va voir si -1 et $\frac{1}{2}$ sont des racines.

Si $x = -1 \Rightarrow$ _____

Alors _____.

Si $x = \frac{1}{2} \Rightarrow$ _____

Ainsi _____.

Alors, on peut maintenant trouver l'aire. Mais, il faut savoir quelle fonction on soustrait de l'autre. On peut voir que la bleue est au dessus donc, on fait

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (x^3 - 4x + 1) - (2x^4 + 4x^2 - 2) dx &= \\
 &= \left. \frac{-2x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 3x \right|_{-1}^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\frac{-2}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{2^2 \cdot 2^4} - \frac{2^2}{3 \cdot 2^3} - \frac{2^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{3}{2} \right) \\
 &\quad - \left(\frac{-2 \cdot -1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{4 \cdot -1}{3} - \frac{4}{2} + 3 \cdot -1 \right) \\
 &= \frac{-2 \cdot 2 \cdot 3 + 5 \cdot 3 - 2^2 \cdot 2^3 \cdot 5 - 2^2 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot 3 + 3 \cdot 2^5 \cdot 5 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 2^6} \\
 &\quad - \frac{2 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 4 \cdot 5 - 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 - 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3} \\
 &= \frac{-12 + 15 - 160 - 480 + 1440}{3 \cdot 5 \cdot 2^6} - \frac{24 + 15 + 80 - 120 - 180}{3 \cdot 4 \cdot 5} \\
 &= \frac{803}{3 \cdot 5 \cdot 2^6} - \frac{-181}{3 \cdot 5 \cdot 2^2} \\
 &= \frac{803 + 181 \cdot 2^4}{3 \cdot 5 \cdot 2^6} \\
 &= \frac{803 + 2896}{3 \cdot 5 \cdot 2^6} \\
 &= \frac{3699}{3 \cdot 5 \cdot 2^6} \\
 &= \frac{1233}{5 \cdot 2^6} \\
 &= \frac{1233}{320}
 \end{aligned}$$

Exemple 3.10 Un dernier exemple. Si on veut l'air dans les deux regions suivant :

