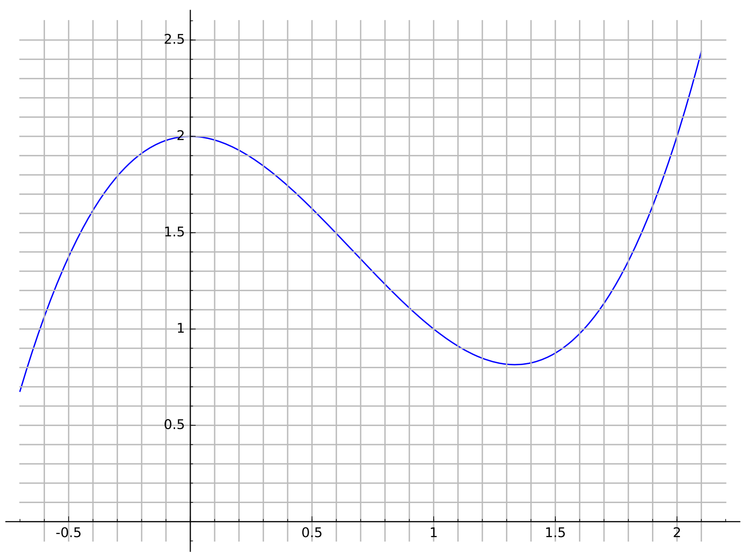
2. Semaine 2 : 17 septembre 2018

2.1. **Partie 1.**

2.1.1. *Rappel.*

2.1.2. *L'aire d'une surface sous une courbe (§1.4 ou §3.2).*

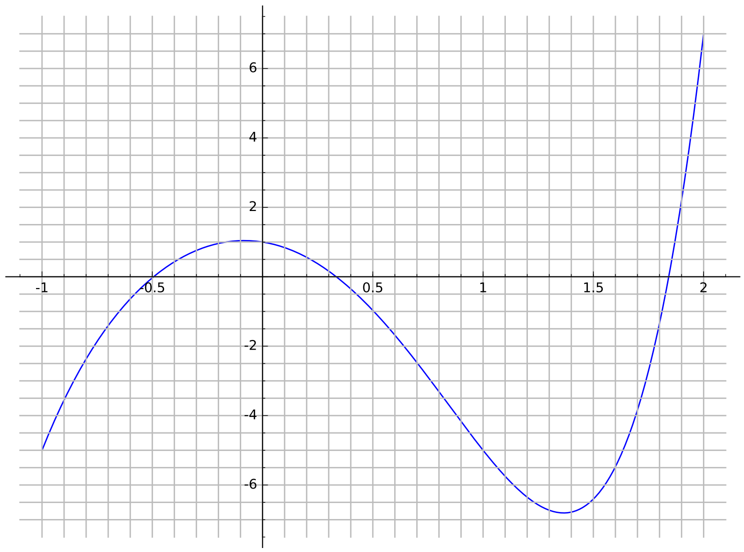
Supposons qu'on a la fonction $f(x) = x^3 - 2\,x^2 + 2$:



Supposons qu'on veut l'aire sous la courbe de 0 à 2. Comment on peut faire ça ?

Estimation : ___.

2.1.3. *Somme de Riemann et Intégrale Définie (§1.5 ou §3.2).* On travail sur la fonction $f(x) = x^5 - 6\,x^2 - x + 1$:



Soit un intervalle fermé $[a, b]$. Une _______________ de l'intervalle sont des nombres x_i tels que :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Ça nous donne n sous-intervalles :

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

Si les intervalles sont tous de même longueur (_______) on dit que la partition est *régulière*.

Exemple 2.1 Soit $a = 2$ et $b = 5$, deux partitions seraient :

$$2 < 2.1 < 3 < 4.2 < \_\_\_\_\_ < 4.51 < 5$$

$$2 < 3 < \_\_ < 5$$

avec les intervalles

$$[2, 2.1],\ [2.1, 3],\ [3, 4.2], \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, [4.51, 5]$$

$$[2, 3], \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Est-ce que elles sont régulières ? ________________________.

Exemple 2.2 Soit $a = 0$ et $b = 1$, donne une partition régulière :

On va toujours supposer que nos partitions sont régulières même si dans le livre c'est pas le cas.

La __________ *d'un intervalle* est la difference entre le début et la fin : ____________________ pour l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$.

Soit $x_i^\star \in [x_{i-1}, x_i]$, la ________________________ de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ est la somme

La *somme à gauche (droite)* est la somme de Riemann où on prend $x_i^\star =$ ______ ($x_i^\star =$ ___). La *somme au* ________ est la somme de Riemann où on prend $x_i^\star = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$.

Alors, maintenant on rencontre un problème. On aimerait trouver l'aire mais on a fait que les approximations ! Qu'est-ce qu'on peut faire pour trouver l'aire exacte ?

La réponse est d'utiliser les limites. Oui... les limites.

La limite qu'on va utiliser pour trouver l'aire est :

Si cette limite existe on dit que la fonction est *intégrable au* ________________________.

MAIS, cette notation est horrible. Qui veut écrire ça à chaque fois ? Personne. Alors on va utiliser une autre notation que (je pense) tout le monde a déjà vu : l'intégrale.

Remarque 2.3 On a utilisé le Σ pour la sommation. Alors il nous faut un autre symbole pour l'intégrale. Heureusement Gottfried Leibniz d'Allemagne a utilisé une notation parfaite dans ses notes de 1675. Il a utilisé le s long allemand de l'epoque : ſ. Pourquoi ? Parce que l'intégrale est une sommation d'une infinitée de sommations. Donc ſ est parfait pour ça. (Même les français ont utilisé le s long jusqu'à 1800 !)

Mais aussi il faut changer le Δ parce qu'on a pris la limite. On va regarder ce qu'il se passe pour le valeur de Δx_i à la limite. Quand on fait la sommation à l'infinie, le valeur de Δx_i diminue. Ainsi, on veut "diminuer" Δ. Alors, c'est quoi le miniscule de Δ ? C'est δ ! Mais, Leibniz est allemand, alors il a utilisé la version allemande de δ : d. Ainsi le Δ devient d.

Alors, SI notre fonction est intégrable au sens de Riemann, on va écrire :

$$\underline{\hspace{5cm}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)\Delta x_i.$$

Quelques définitions :

— Le a est la *borne* ________________ *d'intégration.*

— Le b est la *borne* ________________ *d'intégration.*

— Le $f(x)$ est *l'intégrande.*

— Le x est la ____________ *d'intégration.*

Théorème 2.4 *Si $f(x)$ est une fonction ______________ sur un intervalle $[a,b]$, alors la fonction est ________________ sur cet intervalle.*

2.1.4. *Propriétés des intégrales définies (§1.6 ou §3.2).*

Proposition 2.5 *(1)* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$

(2) $\int_a^a f(x)dx = \_\_$

(3) $\int_a^b f(x)dx = \underline{\hspace{5cm}}$

(4) $\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))\,dx = c_1 \int_a^b f(x)dx + c_2 \int_a^b g(x)dx$ *(linéarité).*

(5) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \underline{\hspace{4cm}}$

Démonstration. (1) ✓

(2) ✓

(3) ✓

(4) Utiliser la définition (dans le livre)

(5) Encore dans le livre, mais une petite remarque sur pourquoi c'est bien définie.

□

2.2. **Partie 2.**

2.2.1. *Théorème fondamental du calcul intégrale (§1.7 ou §3.3).* On a vu la propriété suivante pour les sommations :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - a_{i-1} = \underline{\hspace{3cm}}.$$

Comme on peut voir, notre intégrale est définie de façon similaire :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^\star)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^\star)(x_i - x_{i-1}).$$

alors on veut savoir s'il existe un moyen plus facile pour trouver l'aire. Et on va voir très bientôt qu'il existe un moyen !

Théorème 2.6 *Si $F(x)$ et $G(x)$ sont des fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ et si $F'(x) = G'(x)$ pour tout $x \in]a,b[$, alors* ____________________________, *où c est un constante, pour tout $x \in [a,b]$.*

Si $f(x)$ et $F(x)$ sont des fonctions telles que $F'(x) = f(x)$ alors on dit que $F(x)$ est une *primitive* de $f(x)$.

Et on peut maintenant donner le théorème fondamental du calcul intégral :

Théorème 2.7 (Théorème fondamental du calcul intégral) *Si $f(x)$ est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et si $F(x)$ est une primitve de $f(x)$ alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\hspace{8cm}}$$

2.2.2. *Primitives élémentaires (§1.9 ou §2.1).*

Fonction	**Primitive**
x^n où $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
x^{-1}	
$\sin(kx)$ où $k \neq 0$	$-\frac{\cos(kx)}{k}$
$\cos(kx)$ où $k \neq 0$	$\frac{\sin(kx)}{k}$
$\sec^2(kx)$ où $k \neq 0$	
$\mathrm{cosec}^2(kx)$ où $k \neq 0$	$-\frac{\mathrm{cotan}(kx)}{k}$
$\sec(kx)\tan(kx)$ où $k \neq 0$	$\frac{\sec(kx)}{k}$
$\mathrm{cosec}(kx)\,\mathrm{cotan}(kx)$ où $k \neq 0$	$-\frac{\mathrm{cosec}(kx)}{k}$
e^{kx} où $k \neq 0$	

Exemple 2.8

$$\int_1^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\int_2^4 2x dx = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$\int_0^\pi \sin(x) dx = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$\int_5^5 e^{x^2} \cdot \sin^2(x^2) dx = \underline{\hspace{10cm}}$$

2.2.3. *Les preuves de nos Théorèmes (§1.10 ou §3.3).* Vous avez vu le prochain théorème dans un cours de calcul différentiel.

Théorème 2.9 (Théorème des accroissements finis (ou théorème de la moyenne)) *Si $f(x)$ est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et si $f(x)$ est dérivable pour tout $x \in]a, b[$, alors il existe au moins une valeur de $c \in]a, b[$ telle que*

$$f'(c) = \underline{\hspace{5cm}}.$$

Théorème 2.6. *Si $F(x)$ et $G(x)$ sont des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ et si $F'(x) = G'(x)$ pour tout $x \in]a, b[$, alors* ________________________, *où c est un constante, pour tout $x \in [a, b]$.*

Démonstration. Si $H(x) = F(x) - G(x)$ alors $H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$ (parce que $F'(x) = G'(x)$) pour tout $x \in]a, b[$. Prennons $x_1, x_2 \in]a, b[$ tels que ____________. Puisque nos fonctions sont continues et dérivables, $H(x)$ est continue et dérivable en x_1, x_2. Par le théorème des ____________________________, il existe une constante $c \in]x_1, x_2[$ telle que $H'(c) = \frac{H(x_2) - H(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$ (parce que $c \in]a, b[$). Alors, comme $x_1 < x_2$ et $H'(c) = 0$ on a que ____
Alors, pour tout $x \in [a, b]$ on a $c = H(x) = F(x) - G(x)$, *i.e.*, $F(x) = G(x) + c$. □

Théorème 2.7 (Théorème fondamental du calcul intégral)**.** *Si $f(x)$ est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et si $F(x)$ est une primite de $f(x)$ alors*

$$\int_a^b f(x) dx = \underline{\hspace{8cm}}.$$

Démonstration. $f(x)$ est continue, alors $\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^\star)\Delta x_k$ existe. La fonction $F(x)$ est dérivable ($F'(x) = f(x)$) et alors ______________. Donc par le théorème des accroissements finis pour tout $x_i^\star \in]x_{i-1}, x_i[$ on a

$$f(x_i^\star) = F'(x_i^\star) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{\Delta x_i}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \underline{\hspace{8cm}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{\Delta x_i} \Delta x_i \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1}) \\
&= \underline{\hspace{9cm}} \\
&= F(b) - F(a)
\end{aligned}$$

□

2.2.4. *Formules d'intégration de base (§2.2 ou §2.1).* À cause du théorème fondamental du calcul intégral, pour trouver l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ il faut trouver une fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$. Mais, ça n'est pas toujours facile.

Exemple 2.10 Trouve une fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x) = e^{x^2}$.

Une *intégrale* ______________ est l'ensemble de toutes les primitives d'une fonction donnée. C'est-à-dire : ____________________________________ où c est une constante.

Qu'est-ce que ça veut dire ?

Exemple 2.11 Par exemple, on peut voir que $\int k\,dx = kx + c$. Ça veut dire que kx est une _______________ de k. Pour montrer que c'est vrai il suffit de voir que _______________.

On a plusieurs formules d'intégration provenant du cours de calcul différentiel :

(1) $\int k\,dx = kx + c$
(2) $\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)]\,dx = k_1 \int f(x)\,dx + k_2 \int g(x)\,dx$
(3) $\int x^n\,dx =$ ____________________________________
(4) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + c$
(5) $\int e^x\,dx =$ __________
(6) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ (où $1 \neq a > 0$)
(7) $\int \sin(x)\,dx =$ ____________________
(8) $\int \cos(x)\,dx =$ ________________

(9) $\int \sec(x)\,dx = \ln(|\sec(x)+\tan(x)|)+c$

(10) $\int \mathrm{cosec}(x)\,dx = \ln(|\mathrm{cosec}(x)-\mathrm{cotan}(x)|)+c$

(11) $\int \tan(x)\,dx = \ln(|\sec(x)|)+c$

(12) $\int \mathrm{cotan}(x)\,dx = \ln(|\sin(x)|)+c$

(13) $\int \sec^2(x)\,dx = \tan(x)+c$

(14) $\int \mathrm{cosec}^2(x)\,dx = -\mathrm{cotan}(x)+c$

(15) $\int \sec(x)\tan(x)\,dx = \sec(x)+c$

(16) $\int \mathrm{cosec}(x)\,\mathrm{cotan}(x)\,dx = -\mathrm{cosec}(x)+c$

(17) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x)+c$

(18) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \mathrm{arcsec}(|x|)+c$

(19) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \arctan(x)+c$

Mais, pourquoi ? Parce que, ça nous donne une façon de facilement trouver l'intégrale définie.

Exemple 2.12 Évaluez les expressions suivantes :

(1)

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \frac{12}{x^3}dx &= 12\int_2^4 \frac{1}{x^3}dx \\
&= 12\cdot \frac{1}{-2x^2}\Big|_2^4 \\
&= 12\cdot\left(\frac{1}{-2\cdot 4^2}-\frac{1}{-2\cdot 2^2}\right) \\
&= 12\cdot\left(\frac{1}{-32}-\frac{1}{-8}\right) \\
&= 12\cdot\left(\frac{4}{32}-\frac{1}{32}\right) \\
&= 12\cdot\frac{3}{32} \\
&= \frac{9}{8}.
\end{aligned}$$

(2)

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx =$$

$$= 1$$

Exemple 2.13 Un exemple plus compliqué. Disons qu'on veut trouver $\int_0^\pi 3x^2 - e^x + \cos(x)\,dx$.

$\displaystyle\int 3x^2 - e^x + \cos(x)\,dx =$ ____

Alors

$$\int_0^\pi 3x^2 - e^x + \cos(x)\,dx =$$

$$= \pi^3 - e^\pi + 1$$