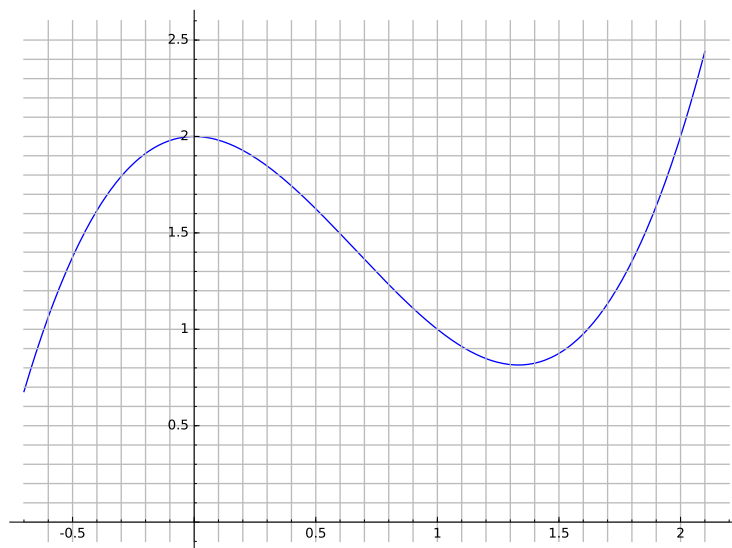


## 2. SEMAINE 2 : 17 SEPTEMBRE 2018

2.1. **Partie 1.**2.1.1. *Rappel.*

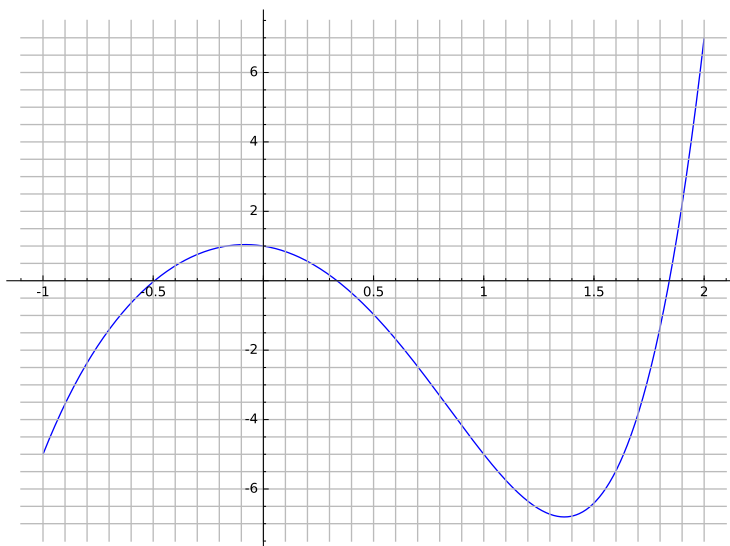
2.1.2. *L'aire d'une surface sous une courbe (§1.4 ou §3.2).* Supposons qu'on a la fonction  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$  :



Supposons qu'on veut l'aire sous la courbe de 0 à 2. Comment on peut faire ça ?

Estimation :     .

2.1.3. *Somme de Riemann et Intégrale Définie (§1.5 ou §3.2).* On travail sur la fonction  $f(x) = x^5 - 6x^2 - x + 1$  :



Soit un intervalle fermé  $[a, b]$ . Une                      de l'intervalle sont des nombres  $x_i$  tels que :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Ça nous donne  $n$  sous-intervalles :

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

Si les intervalles sont tous de même longueur (          ) on dit que la partition est *régulière*.

**Exemple 2.1** Soit  $a = 2$  et  $b = 5$ , deux partitions seraient :

$$2 < 2.1 < 3 < 4.2 < \underline{\hspace{1cm}} < 4.51 < 5$$

$$2 < 3 < \underline{\hspace{1cm}} < 5$$

avec les intervalles

$$[2, 2.1], [2.1, 3], [3, 4.2], \underline{\hspace{3cm}}, [4.51, 5]$$

$$[2, 3], \underline{\hspace{3cm}}$$

Est-ce que elles sont régulières? \_\_\_\_\_.

**Exemple 2.2** Soit  $a = 0$  et  $b = 1$ , donne une partition régulière :

On va toujours supposer que nos partitions sont régulières même si dans le livre c'est pas le cas.

La \_\_\_\_\_ *d'un intervalle* est la différence entre le début et la fin : \_\_\_\_\_ pour l'intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$ .

Soit  $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ , la \_\_\_\_\_ de la fonction  $f(x)$  sur l'intervalle  $[a, b]$  est la somme

La *somme à gauche (droite)* est la somme de Riemann où on prend  $x_i^* =$  \_\_\_\_\_ ( $x_i^* =$  \_\_\_\_\_). La *somme au* \_\_\_\_\_ est la somme de Riemann où on prend  $x_i^* = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ .

Alors, maintenant on rencontre un problème. On aimerait trouver l'aire mais on a fait que les approximations! Qu'est-ce qu'on peut faire pour trouver l'aire exacte?

La réponse est d'utiliser les limites. Oui... les limites.

La limite qu'on va utiliser pour trouver l'aire est :

Si cette limite existe on dit que la fonction est *intégrable au* \_\_\_\_\_.

MAIS, cette notation est horrible. Qui veut écrire ça à chaque fois? Personne. Alors on va utiliser une autre notation que (je pense) tout le monde a déjà vu : l'intégrale.

**Remarque 2.3** On a utilisé le  $\Sigma$  pour la sommation. Alors il nous faut un autre symbole pour l'intégrale. Heureusement Gottfried Leibniz d'Allemagne a utilisé une notation parfaite dans ses notes de 1675. Il a utilisé le s long allemand de l'époque : f. Pourquoi? Parce que l'intégrale est une sommation d'une infinité de sommations. Donc f est parfait pour ça. (Même les français ont utilisé le s long jusqu'à 1800!)

Mais aussi il faut changer le  $\Delta$  parce qu'on a pris la limite. On va regarder ce qu'il se passe pour le valeur de  $\Delta x_i$  à la limite. Quand on fait la sommation à l'infinie, le valeur de  $\Delta x_i$  diminue. Ainsi, on veut "diminuer"  $\Delta$ . Alors, c'est quoi

le miniscule de  $\Delta$ ? C'est  $\delta$ ! Mais, Leibniz est allemand, alors il a utilisé la version allemande de  $\delta$  :  $d$ . Ainsi le  $\Delta$  devient  $d$ .

Alors, SI notre fonction est intégrable au sens de Riemann, on va écrire :

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i.$$

Quelques définitions :

- Le  $a$  est la borne \_\_\_\_\_ d'intégration.
- Le  $b$  est la borne \_\_\_\_\_ d'intégration.
- Le  $f(x)$  est l'intégrande.
- Le  $x$  est la \_\_\_\_\_ d'intégration.

**Théorème 2.4** Si  $f(x)$  est une fonction \_\_\_\_\_ sur un intervalle  $[a, b]$ , alors la fonction est \_\_\_\_\_ sur cet intervalle.

2.1.4. Propriétés des intégrales définies (§1.6 ou §3.2).

**Proposition 2.5** (1)  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$

(2)  $\int_a^a f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(3)  $\int_a^b f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(4)  $\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x)) dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx$  (linéarité).

(5)  $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$

Démonstration. (1) ✓

(2) ✓

(3) ✓

(4) Utiliser la définition (dans le livre)

(5) Encore dans le livre, mais une petite remarque sur pourquoi c'est bien définie.

□

2.1.5. Théorème fondamental du calcul intégrale (§1.7 ou §3.3). On a vu la propriété suivante pour les sommations :

$$\sum_{i=1}^n a_i - a_{i-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

Comme on peut voir, notre intégrale est définie de façon similaire :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) (x_i - x_{i-1}).$$

alors on veut savoir s'il existe un moyen plus facile pour trouver l'aire. Et on va voir très bientôt qu'il existe un moyen !

**Théorème 2.6** Si  $F(x)$  et  $G(x)$  sont des fonctions continues sur un intervalle  $[a, b]$  et si  $F'(x) = G'(x)$  pour tout  $x \in ]a, b[$ , alors \_\_\_\_\_, où  $c$  est une constante, pour tout  $x \in [a, b]$ .

Si  $f(x)$  et  $F(x)$  sont des fonctions telles que  $F'(x) = f(x)$  alors on dit que  $F(x)$  est une *primitive* de  $f(x)$ .

Et on peut maintenant donner le théorème fondamental du calcul intégral :

**Théorème 2.7** (Théorème fondamental du calcul intégral) Si  $f(x)$  est une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$  et si  $F(x)$  est une primitive de  $f(x)$  alors

$$\int_a^b f(x) dx = \underline{\hspace{10cm}}$$

## 2.2. Partie 2.

### 2.2.1. Primitives élémentaires (§1.9 ou §2.1).

| Fonction  | Primitive                             |
|---|---------------------------------------|
| $x^n$ où $n \neq -1$  | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$                 |
| $x^{-1}$  |                                       |
| $\sin(kx)$ où $k \neq 0$  | $-\frac{\cos(kx)}{k}$                 |
| $\cos(kx)$ où $k \neq 0$  | $\frac{\sin(kx)}{k}$                  |
| $\sec^2(kx)$ où $k \neq 0$  |                                       |
| $\operatorname{cosec}^2(kx)$ où $k \neq 0$                        | $-\frac{\operatorname{cotan}(kx)}{k}$ |
| $\sec(kx) \tan(kx)$ où $k \neq 0$                                 | $\frac{\sec(kx)}{k}$                  |
| $\operatorname{cosec}(kx) \operatorname{cotan}(kx)$ où $k \neq 0$ | $-\frac{\operatorname{cosec}(kx)}{k}$ |
| $e^{kx}$ où $k \neq 0$  |                                       |

**Exemple 2.8**

$$\int_1^2 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\int_2^4 2x dx =$$

$$\int_0^\pi \sin(x) dx =$$

$$\int_5^5 e^{x^2} \cdot \sin^2(x^2) dx =$$

2.2.2. *Les preuves de nos Théorèmes (§1.10 ou §3.3).* Vous avez vu le prochain théorème dans un cours de calcul différentiel.

**Théorème 2.9** (Théorème des accroissements finis (ou théorème de la moyenne))  
*Si  $f(x)$  est une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$  et si  $f(x)$  est dérivable pour tout  $x \in ]a, b[$ , alors il existe au moins une valeur de  $c \in ]a, b[$  telle que*

$$f'(c) =$$

**Théorème 2.6.** *Si  $F(x)$  et  $G(x)$  sont des fonctions continues sur un intervalle  $[a, b]$  et si  $F'(x) = G'(x)$  pour tout  $x \in ]a, b[$ , alors \_\_\_\_\_, où  $c$  est une constante, pour tout  $x \in [a, b]$ .*

*Démonstration.* Si  $H(x) = F(x) - G(x)$  alors  $H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$  (parce que  $F'(x) = G'(x)$ ) pour tout  $x \in ]a, b[$ . Prenons  $x_1, x_2 \in ]a, b[$  tels que \_\_\_\_\_. Puisque nos fonctions sont continues et dérivables,  $H(x)$  est continue et dérivable en  $x_1, x_2$ . Par le théorème des \_\_\_\_\_, il existe une constante  $c \in ]x_1, x_2[$  telle que  $H'(c) = \frac{H(x_2) - H(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$  (parce que  $c \in ]a, b[$ ). Alors, comme  $x_1 < x_2$  et  $H'(c) = 0$  on a que \_\_\_\_\_

Alors, pour tout  $x \in [a, b]$  on a  $c = H(x) = F(x) - G(x)$ , i.e.,  $F(x) = G(x) + c$ .  $\square$

**Théorème 2.7** (Théorème fondamental du calcul intégral). *Si  $f(x)$  est une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$  et si  $F(x)$  est une primitive de  $f(x)$  alors*

$$\int_a^b f(x) dx =$$

*Démonstration.*  $f(x)$  est continue, alors  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_k$  existe. La fonction  $F(x)$  est dérivable ( $F'(x) = f(x)$ ) et alors \_\_\_\_\_. Donc par le théorème des accroissements finis pour tout  $x_i^* \in ]x_{i-1}, x_i[$  on a

$$f(x_i^*) = F'(x_i^*) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{\Delta x_i}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &= \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{\Delta x_i} \Delta x_i \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F(x_i) - F(x_{i-1}) \\
 &= \\
 &= F(b) - F(a)
 \end{aligned}$$

□

2.2.3. *Formules d'intégration de base (§2.2 ou §2.1).* À cause du théorème fondamental du calcul intégral, pour trouver l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  il faut trouver une fonction  $F(x)$  telle que  $F'(x) = f(x)$ . Mais, ça n'est pas toujours facile.

**Exemple 2.10** Trouve une fonction  $F(x)$  telle que  $F'(x) = f(x) = e^{x^2}$ .

Une *intégrale* \_\_\_\_\_ est l'ensemble de toutes les primitives d'une fonction donnée. C'est-à-dire : \_\_\_\_\_ où  $c$  est une constante.

Qu'est-ce que ça veut dire ?

**Exemple 2.11** Par exemple, on peut voir que  $\int k dx = kx + c$ . Ça veut dire que  $kx$  est une \_\_\_\_\_ de  $k$ . Pour montrer que c'est vrai il suffit de voir que \_\_\_\_\_.

On a plusieurs formules d'intégration provenant du cours de calcul différentiel :

- (1)  $\int k dx = kx + c$
- (2)  $\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)] dx = k_1 \int f(x) dx + k_2 \int g(x) dx$
- (3)  $\int x^n dx =$  \_\_\_\_\_
- (4)  $\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + c$
- (5)  $\int e^x dx =$  \_\_\_\_\_
- (6)  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$  (où  $1 \neq a > 0$ )
- (7)  $\int \sin(x) dx =$  \_\_\_\_\_
- (8)  $\int \cos(x) dx =$  \_\_\_\_\_

$$(9) \int \sec(x) dx = \ln(|\sec(x) + \tan(x)|) + c$$

$$(10) \int \operatorname{cosec}(x) dx = \ln(|\operatorname{cosec}(x) - \cotan(x)|) + c$$

$$(11) \int \tan(x) dx = \ln(|\sec(x)|) + c$$

$$(12) \int \cotan(x) dx = \ln(|\sin(x)|) + c$$

$$(13) \int \sec^2(x) dx = \tan(x) + c$$

$$(14) \int \operatorname{cosec}^2(x) dx = -\cotan(x) + c$$

$$(15) \int \sec(x) \tan(x) dx = \sec(x) + c$$

$$(16) \int \operatorname{cosec}(x) \cotan(x) dx = -\operatorname{cosec}(x) + c$$

$$(17) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c$$

$$(18) \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcsec}(|x|) + c$$

$$(19) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$$

Mais, pourquoi ? Parce que, ça nous donne une façon de facilement trouver l'intégrale définie.

**Exemple 2.12** Évaluez les expressions suivantes :

(1)

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{12}{x^3} dx &= 12 \int_2^4 \frac{1}{x^3} dx \\ &= 12 \cdot \frac{1}{-2x^2} \Big|_2^4 \\ &= 12 \cdot \left( \frac{1}{-2 \cdot 4^2} - \frac{1}{-2 \cdot 2^2} \right) \\ &= 12 \cdot \left( \frac{1}{-32} - \frac{1}{-8} \right) \\ &= 12 \cdot \left( \frac{4}{32} - \frac{1}{32} \right) \\ &= 12 \cdot \frac{3}{32} \\ &= \frac{9}{8}. \end{aligned}$$



(2)

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx =$$

$$= 1$$

**Exemple 2.13** Un exemple plus compliqué. Disons qu'on veut trouver  $\int_0^\pi 3x^2 - e^x + \cos(x) dx$ .

$$\int 3x^2 - e^x + \cos(x) dx =$$

---

Alors

$$\int_0^\pi 3x^2 - e^x + \cos(x) dx =$$

$$= \pi^3 - e^\pi + 1$$