MAT 0344

Notes du cours

by Aram Dermenjian

17 septembre 2018

1. Semaine 1 : 10 septembre 2018

1.1. **Partie 1.** Bienvenue au cours de Calcul Intégral ! Ces notes de cours sont faites pour t'aider à bien maîtriser le sujet. Si jamais tu as des questions n'hesites pas me demander !

Ce cours est donné par ______________________________. Pour le trouver, il est disponible dans son bureau (_______________) à :

(1) ______________________________________
(2) ______________________________________
(3) ____
(4) Avec rendez-vous – ____

Commençons avec le cours et le plan

— Evaluation :

Devoir 1 :	__________________ (remis en classe)	**Pondération**	________
Examen 1 :	__________________	**Pondération**	________
Devoir 2 :	___________________ (remis en classe)	**Pondération**	________
Examen 2 :	_____________________	**Pondération**	________

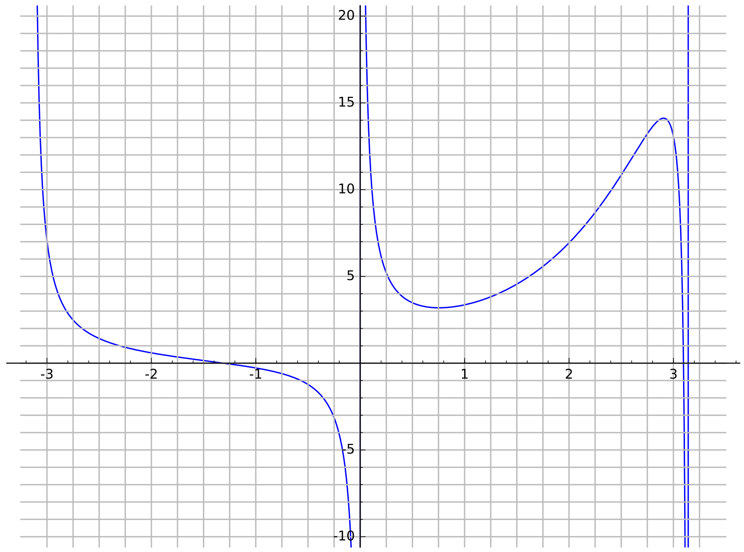
— Moodle :

— L'intégrité académique

— Politique 16 sur le harcèlement sexuel

1.1.1. *Calcul différentiel.* C'est un cours de calcul, donc on va travailler avec des fonctions ! Alors, on commence avec une fonction. Disons, la suivante :

$$f(x) = e^x + \cot(x)$$



On rappelle qu'une fonction est _______________ sur un intervalle I si pour tout $a \in I$ on a

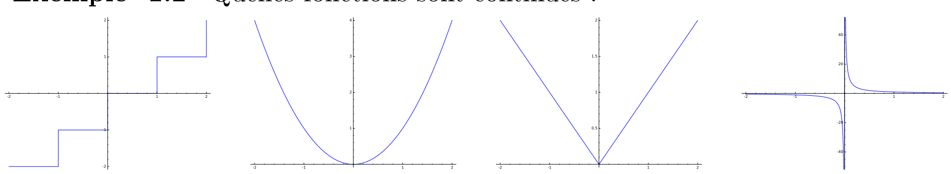
$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \nu > 0 \, \forall x \in I \ \left(|x-a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \nu \right).$$

Qu'est-ce que ça veut dire ? C'est qu'il y a aucun endroit où la fonction va vers ni ____ ni _______ sur I.

Exemple 1.1 Dans notre exemple, où notre fonction $f(x) = e^x + \cot(x)$ est-elle continue ?

$$[-1,1]\,? \ \_\_\_\_\_\_ \qquad [1,3]\,? \ \_\_\_\_\_\_ \qquad \mathbb{R}\,? \ \_\_\_\_\_\_$$

Exemple 1.2 Quelles fonctions sont continues :



Une ____________ d'une fonction $f(x)$ sur un intervalle I est une fonction $f'(x)$ telle que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

est bien définie pour tout x dans l'intervalle I.

C'est-à-dire, la dérivée est la fonction pour les lignes tangentes à la courbe.

Exemple 1.3 Dans notre exemple $f(x) = e^x + \cot(x)$, on a

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Voici une liste des dérivées usuelles :

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
$f(x) = x^r$	$f'(x) = rx^{r-1}$	$f(x) = kg(x)$	$f'(x) = kg'(x)$
$f(x) = g(x)h(x)$		$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$	$f'(x) = \frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{h^2(x)}$
$f(x) = g(h(x))$		$f(x) = g(x)^r$	$f'(x) = r(g(x))^{r-1}g'(x)$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln(a)$	$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$
$f(x) = \sin(x)$		$f(x) = \cos(x)$	
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \sec^2(x)$	$f(x) = \cot(x)$	$f'(x) = -\csc^2(x)$
$f(x) = \sec(x)$	$f'(x) = \sec(x)\tan(x)$	$f(x) = \csc(x)$	$f'(x) = -\csc(x)\cot(x)$
$f(x) = \arcsin(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \arccos(x)$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arctan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$f(x) = \operatorname{arccot}(x)$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$
$f(x) = \operatorname{arcsec}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	$f(x) = \operatorname{arccsc}(x)$	$f'(x) = \frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$

Dans le livre de Charron et Parent, ils se trompent avec arcsec et arccsc.

1.1.2. *Règle de L'Hôpital (§5.1 ou §1.4).* Rappelons la règle :

Théorème 1.4 (Règle de L'Hôpital) *Si* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ *ou* $= \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ *et si la limite* $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe, ou est infinie, alors*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemples 1.5 (1) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{2x-1} = \frac{\infty}{\infty}$. Prenons $f(x) = x+3$ et $g(x) = 2x-1$ on a $f'(x) = 1$, $g'(x) = 2$. Ainsi,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{2x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}.$$

(2) $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+4)^2}{x^2-2000} = \frac{\infty}{\infty}$

(3) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} = \frac{0}{0}$.

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \frac{0}{0}$.

1.1.3. *Les formes $\infty - \infty$ et $0 \cdot \pm\infty$ (§5.2 ou §1.4).* On peut utiliser la règle de l'Hôpital pour les fonctions où la limite devient $\infty - \infty$ ou $0 \cdot \pm\infty$. Pour $\infty - \infty$, c'est facile à regler et on va le faire dans un exemple :

Exemple 1.6 Trouver la limite : $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\sin(x)} - \frac{1}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\sin(x)} - \frac{1}{x^2} = \infty - \infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\sin(x)} - \frac{1}{x^2} \quad =$$

$$= \frac{1}{6}$$

Alors, on a changé notre equation $f(x) = g(x) - h(x)$ pour quelque chose qui est une fraction dont la limite vaut soit $\frac{0}{0}$ soit $\frac{\infty}{\infty}$. Mais qu'est-ce qu'on fait si on a $0 \cdot \pm\infty$? On fait la même chose !

Exemple 1.7 Trouver la limite : $\lim_{x\to 0} 8x^4 \ln(3x)$.

$$\lim_{x\to 0} 8x^4 \ln(3x) = 0 \cdot \infty$$

$$\lim_{x\to 0} 8x^4 \ln(3x) \quad =$$

$$= 0$$

1.1.4. *Les formes 0^0, ∞^0 et $1^{\pm\infty}$ (§5.3 ou §1.4).* Ce qu'on va faire sera très bizarre, mais on va voir que ça nous donne la bonne reponse. Faisons un exemple.

Exemple 1.8 Trouver la limit : $\lim_{x\to 0} (x^2)^{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0} (x^2)^{x^2} = 0^0$$

$$\lim_{x\to 0} (x^2)^{x^2} \quad \to$$

$$\lim_{x\to 0} (x^2)^{x^2} \quad = e^0 = 1$$

Alors, il faut faire les étapes suivants :

(1) ________________________________
(2) ________________________________
(3) ________________________________

1.2. **Partie 2.**

1.2.1. *Sommation (§1.2 ou §3.1).* On commence avec l'addition.

Exemple 1.9 Disons qu'on veut ajouter 1 à lui-même dix fois. On peut le faire comme : $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 10$. Mais, ça ce complique quand on veut ajouter 1 encore plus de fois, disons 25 fois :

$1{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1{+}1 = 25.$

C'est trop long, alors on veut l'écrire de manière plus visible. Pour l'addition de 1 à lui-même c'est facile. On fait $1 \cdot n$ où n est le nombre de fois qu'on veut ajouter 1 à lui-même. Ainsi, disons qu'on veut ajouter chaque entier de 1 à 10 : $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 55$. Et, si on le fait pour 1 à 25, c'est long :

$1{+}2{+}3{+}4{+}5{+}6{+}7{+}8{+}9{+}10{+}11{+}12{+}13{+}14{+}15{+}16{+}17{+}18{+}19{+}20{+}21{+}22{+}23{+}24{+}25 = $ ______

Lorsqu'on veut abréger la sommation on introduit une nouvelle notation : ___.

Exemple 1.10

$$\sum_{i=1}^{10} 1 = 10 \qquad \sum_{i=1}^{10} i = 55$$

En général on a quelque chose comme :

$$\sum_{i=m}^{n} a_i =$$

Les a_i sont les *indices de sommation* et ils se sont justes des fonctions. Si on veut que la sommation continue jusqu'à l'infini, on peut mettre $n = \infty$: $\sum_{i=m}^{\infty} a_i$.

Exemple 1.11 Faisons des examples :

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{4} 2i - 1 = 2(1) - 1 + 2(2) - 1 + 2(3) - 1 + 2(4) - 1 = 2 + 4 + 6 + 8 - 4 = 16$$

$$\sum_{i=m}^{n} b_i = \sum_{i=3}^{5} i^2 + 1 = \underline{\hspace{20em}}$$

$$\sum_{j=x}^{y} i_j = \sum_{j=-4}^{-1} 3 = \underline{\hspace{12em}}$$

Et dans l'autre sens :

$$2+2+2+2+2 = \sum_{i=1}^{5} 2$$

$$5+8+11+14 = \underline{\hspace{6em}}$$

$$1+0-1-2-3 = \underline{\hspace{4em}}$$

1.2.2. *Propriétés de la notation sigma (§1.3 ou §3.1).*

Proposition 1.12 *(1)* $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m}^{n} a_j$.

(2) $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n-m+1} a_{i+m-1}$.

(3) $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{m-1} a_i$.

(4) *Pour* $c \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=m}^{n} c = (n-m+1)c$.

(5) *Pour* $c \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=m}^{n} ca_i = c\sum_{i=m}^{n} a_i$.

(6) $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = (\sum_{i=1}^{n} a_i) + (\sum_{i=1}^{n} b_i)$

(7) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) =$ ____________. *somme télescopique*

(8) $\sum_{i=1}^{n} i =$ ___________.

(9) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(10) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(11) $\sum_{i=1}^{n} r^i = \frac{r^{n+1}-r}{r-1}$.

Démonstration. (1) ✓

(2) $\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n = a_{1+m-1} + a_{2+m-1} + \cdots + a_{n-m+1+m-1} = \sum_{i=1}^{n-m+1} a_{i+m-1}$

(3) ✓

(4) ✓

(5)

(6) ✓

(7) $\sum_{i=1}^{n} a_i - a_{i-1} = a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \cdots + a_2 - a_1 + a_1 - a_0 = a_n - a_0$.

(8)

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{n} i \\
S &= 1 + 2 + \cdots + n \\
S &= n + n - 1 + \cdots + 1 \\
2S &= (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) \\
2S &= n(n+1) \\
S &= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

(9)

$$\sum_{i=1}^{n}(i^3-(i-1)^3) = n^3 - 0^3$$

Aussi,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left((i^3-(i-1)^3\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(i^3-\left(i^3-3i^2+3i-1\right)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(3i^2-3^i+1\right)\\
&= 3\sum_{i=1}^{n}i^2 - 3\sum_{i=1}^{n}i + \sum_{i=1}^{n}1\\
&= 3\sum_{i=1}^{n}i^2 - 3\frac{n(n+1)}{2} + n
\end{aligned}$$

Mettons les deux ensemble :

$$\begin{aligned}
n^3 &= 3\sum_{i=1}^{n}i^2 - 3\frac{n(n+1)}{2} + n\\
\sum_{i=1}^{n}i^2 &= \frac{1}{3}\left(n^3 + 3\frac{n(n+1)}{2} - n\right)\\
&= \frac{n}{6}\left(2n^2+3n+1\right)\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

(10) Exercice

(11)

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{n}r^i\\
S &= r + r^2 + \cdots + r^n\\
rS &= r^2 + r^3 + \cdots + r^{n+1}\\
rS - S &= r^{n+1} - r\\
S &= \frac{r^{n+1}-r}{r-1}
\end{aligned}$$

□

Exemples 1.13

$$\sum_{i=1}^{100} i = \frac{100 * (100+1)}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$$

$$\sum_{k=5}^{12} k^2 = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$\sum_{i=1}^{20} i^2 - i - 10 = \underline{\hspace{10cm}}$$