

MAT 0344  
Notes du cours  
by Aram Dermenjian  
26 novembre 2018

## 1. SEMAINE 1 : 10 SEPTEMBRE 2018

1.1. **Partie 1.** Bienvenue au cours de Calcul Intégral! Ces notes de cours sont faites pour t'aider à bien maîtriser le sujet. Si jamais tu as des questions n'hésites pas me demander!

Ce cours est donné par \_\_\_\_\_ . Pour le trouver, il est disponible dans son bureau (\_\_\_\_\_) à :

- (1) \_\_\_\_\_
- (2) \_\_\_\_\_
- (3) \_\_\_\_\_
- (4) Avec rendez-vous – \_\_\_\_\_

Commençons avec le cours et le plan

— Evaluation :

**Devoir 1 :** \_\_\_\_\_ (remis en classe)      **Pondération** \_\_\_\_\_

**Examen 1 :** \_\_\_\_\_      **Pondération** \_\_\_\_\_

**Devoir 2 :** \_\_\_\_\_ (remis en classe)      **Pondération** \_\_\_\_\_

**Examen 2 :** \_\_\_\_\_      **Pondération** \_\_\_\_\_

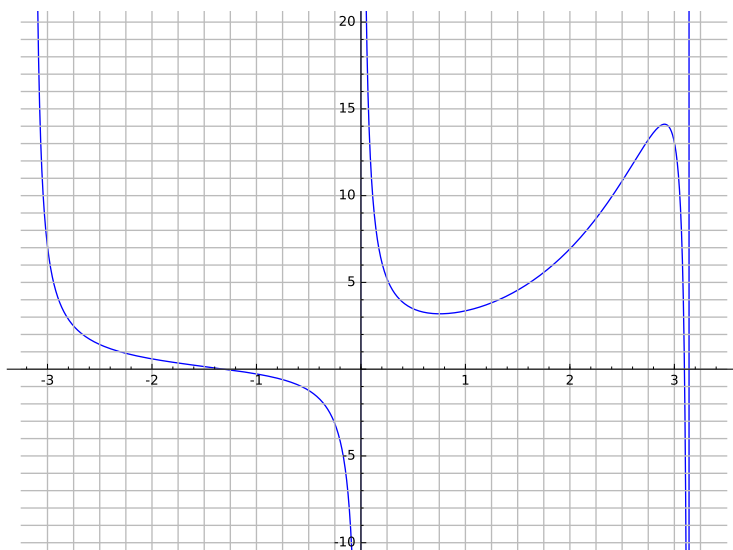
— Moodle :

— L'intégrité académique

— Politique 16 sur le harcèlement sexuel

1.1.1. *Calcul différentiel.* C'est un cours de calcul, donc on va travailler avec des fonctions! Alors, on commence avec une fonction. Disons, la suivante :

$$f(x) = e^x + \cot(x)$$



On rappelle qu'une fonction est \_\_\_\_\_ sur un intervalle  $I$  si pour tout  $a \in I$  on a

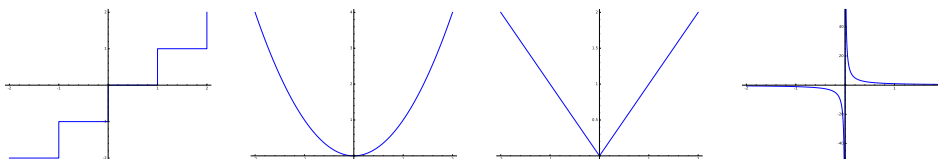
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu > 0 \forall x \in I (|x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \nu).$$

Qu'est-ce que ça veut dire? C'est qu'il y a aucun endroit où la fonction va vers ni \_\_\_\_\_ ni \_\_\_\_\_ sur  $I$ .

**Exemple 1.1** Dans notre exemple, où notre fonction  $f(x) = e^x + \cot(x)$  est-elle continue?

$[-1, 1]$ ? \_\_\_\_\_  $[1, 3]$ ? \_\_\_\_\_  $\mathbb{R}$ ? \_\_\_\_\_

**Exemple 1.2** Quelles fonctions sont continues :



Une \_\_\_\_\_ d'une fonction  $f(x)$  sur un intervalle  $I$  est une fonction  $f'(x)$  telle que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

est bien définie pour tout  $x$  dans l'intervalle  $I$ .

C'est-à-dire, la dérivée est la fonction pour les lignes tangentes à la courbe.

**Exemple 1.3** Dans notre exemple  $f(x) = e^x + \cot(x)$ , on a

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Voici une liste des dérivées usuelles :

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
$f(x) = x^r$	$f'(x) = rx^{r-1}$	$f(x) = kg(x)$	$f'(x) = kg'(x)$
$f(x) = g(x)h(x)$		$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$	$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h^2(x)}$
$f(x) = g(h(x))$		$f(x) = g(x)^r$	$f'(x) = r(g(x))^{r-1}g'(x)$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln(a)$	$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$
$f(x) = \sin(x)$		$f(x) = \cos(x)$	
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \sec^2(x)$	$f(x) = \cot(x)$	$f'(x) = -\csc^2(x)$
$f(x) = \sec(x)$	$f'(x) = \sec(x) \tan(x)$	$f(x) = \csc(x)$	$f'(x) = -\csc(x) \cot(x)$
$f(x) = \arcsin(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \arccos(x)$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arctan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$f(x) = \operatorname{arccot}(x)$	$f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$
$f(x) = \operatorname{arcsec}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}}$	$f(x) = \operatorname{arccsc}(x)$	$f'(x) = \frac{-1}{ x \sqrt{x^2-1}}$

⚠ Dans le livre de Charron et Parent, ils se trompent avec arcsec et arccsc.

1.1.2. Règle de L'Hôpital (§5.1 ou §1.4). Rappelons la règle :

**Théorème 1.4** (Règle de L'Hôpital) Si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$  ou  $= \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$  et si la limite  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existe, ou est infinie, alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Exemples 1.5** (1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{2x-1} = \frac{\infty}{\infty}$ . Prenons  $f(x) = x+3$  et  $g(x) = 2x-1$  on a  $f'(x) = 1$ ,  $g'(x) = 2$ . Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.$$

(2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+4)^2}{x^2-2000} = \frac{\infty}{\infty}$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{2} - \sqrt{x}} = \frac{0}{0}.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \frac{0}{0}.$$

1.1.3. *Les formes  $\infty - \infty$  et  $0 \cdot \pm\infty$  (§5.2 ou §1.4).* On peut utiliser la règle de l'Hôpital pour les fonctions où la limite devient  $\infty - \infty$  ou  $0 \cdot \pm\infty$ . Pour  $\infty - \infty$ , c'est facile à régler et on va le faire dans un exemple :

**Exemple 1.6** Trouver la limite :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \sin(x)} - \frac{1}{x^2}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \sin(x)} - \frac{1}{x^2} = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \sin(x)} - \frac{1}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{6}$$

Alors, on a changé notre équation  $f(x) = g(x) - h(x)$  pour quelque chose qui est une fraction dont la limite vaut soit  $\frac{0}{0}$  soit  $\frac{\infty}{\infty}$ . Mais qu'est-ce qu'on fait si on a  $0 \cdot \pm\infty$ ? On fait la même chose!

**Exemple 1.7** Trouver la limite :  $\lim_{x \rightarrow 0} 8x^4 \ln(3x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} 8x^4 \ln(3x) = 0 \cdot \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 8x^4 \ln(3x) =$$

$$= 0$$

1.1.4. *Les formes  $0^0$ ,  $\infty^0$  et  $1^{\pm\infty}$  (§5.3 ou §1.4).* Ce qu'on va faire sera très bizarre, mais on va voir que ça nous donne la bonne réponse. Faisons un exemple.

**Exemple 1.8** Trouver la limite :  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2)^{x^2}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2)^{x^2} = 0^0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2)^{x^2} \rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2)^{x^2} = e^0 = 1$$

Alors, il faut faire les étapes suivants :

(1) \_\_\_\_\_

(2) \_\_\_\_\_

(3) \_\_\_\_\_

1.2. **Partie 2.**

1.2.1. *Sommation (§1.2 ou §3.1).* On commence avec l'addition.

**Exemple 1.9** Disons qu'on veut ajouter 1 à lui-même dix fois. On peut le faire comme :  $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10$ . Mais, ça ce complique quand on veut ajouter 1 encore plus de fois, disons 25 fois :

$$1+1 = 25.$$

C'est trop long, alors on veut l'écrire de manière plus visible. Pour l'addition de 1 à lui-même c'est facile. On fait  $1 \cdot n$  où  $n$  est le nombre de fois qu'on veut ajouter 1 à lui-même. Ainsi, disons qu'on veut ajouter chaque entier de 1 à 10 :  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$ . Et, si on le fait pour 1 à 25, c'est long :

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20+21+22+23+24+25 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Lorsqu'on veut abréger la sommation on introduit une nouvelle notation :  $\sum$ .

**Exemple 1.10**

$$\sum_{i=1}^{10} 1 = 10 \quad \sum_{i=1}^{10} i = 55$$

En général on a quelque chose comme :

$$\sum_{i=m}^n a_i =$$

Les  $a_i$  sont les *indices de sommation* et ils se sont justes des fonctions. Si on veut que la sommation continue jusqu'à l'infini, on peut mettre  $n = \infty$  :  $\sum_{i=m}^{\infty} a_i$ .

**Exemple 1.11** Faisons des exemples :

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{i=1}^4 2i - 1 = 2(1) - 1 + 2(2) - 1 + 2(3) - 1 + 2(4) - 1 = 2 + 4 + 6 + 8 - 4 = 16$$

$$\sum_{i=m}^n b_i = \sum_{i=3}^5 i^2 + 1 = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$\sum_{j=x}^y i_j = \sum_{j=-4}^{-1} 3 = \underline{\hspace{4cm}}$$

Et dans l'autre sens :

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 = \sum_{i=1}^5 2$$

$$5 + 8 + 11 + 14 = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$1 + 0 - 1 - 2 - 3 = \underline{\hspace{4cm}}$$

## 1.2.2. Propriétés de la notation sigma (§1.3 ou §3.1).

**Proposition 1.12** (1)  $\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{j=m}^n a_j$ .

$$(2) \sum_{i=m}^n a_i = \sum_{i=1}^{n-m+1} a_{i+m-1}.$$

$$(3) \sum_{i=m}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^{m-1} a_i.$$

$$(4) \text{ Pour } c \in \mathbb{R}, \sum_{i=m}^n c = (n - m + 1)c.$$

$$(5) \text{ Pour } c \in \mathbb{R}, \sum_{i=m}^n ca_i = c \sum_{i=m}^n a_i.$$

$$(6) \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) + \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)$$

$$(7) \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) = \underline{\hspace{2cm}}. \quad \text{somme télescopique}$$

$$(8) \sum_{i=1}^n i = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(9) \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$(10) \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

$$(11) \sum_{i=1}^n r^i = \frac{r^{n+1} - r}{r-1}.$$

*Démonstration.* (1) ✓

$$(2) \sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n = a_{1+m-1} + a_{2+m-1} + \cdots + a_{n-m+1+m-1} = \sum_{i=1}^{n-m+1} a_{i+m-1}$$

$$(3) \checkmark$$

$$(4) \checkmark$$

$$(5)$$

$$(6) \checkmark$$

$$(7) \sum_{i=1}^n a_i - a_{i-1} = a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \cdots + a_2 - a_1 + a_1 - a_0 = a_n - a_0.$$

$$(8)$$

$$S = \sum_{i=1}^n i$$

$$S = 1 + 2 + \cdots + n$$

$$S = n + n - 1 + \cdots + 1$$

$$2S = (n + 1) + (n + 1) + \cdots + (n + 1)$$

$$2S = n(n + 1)$$

$$S = \frac{n(n + 1)}{2}$$



(9)

$$\sum_{i=1}^n (i^3 - (i-1)^3) = n^3 - 0^3$$

Aussi,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n ((i^3 - (i-1)^3)) &= \sum_{i=1}^n (i^3 - (i^3 - 3i^2 + 3i - 1)) \\ &= \sum_{i=1}^n (3i^2 - 3i + 1) \\ &= 3 \sum_{i=1}^n i^2 - 3 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \\ &= 3 \sum_{i=1}^n i^2 - 3 \frac{n(n+1)}{2} + n \end{aligned}$$

Mettons les deux ensemble :

$$\begin{aligned} n^3 &= 3 \sum_{i=1}^n i^2 - 3 \frac{n(n+1)}{2} + n \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{1}{3} \left( n^3 + 3 \frac{n(n+1)}{2} - n \right) \\ &= \frac{n}{6} (2n^2 + 3n + 1) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

(10) Exercice

(11)

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n r^i \\ S &= r + r^2 + \dots + r^n \\ rS &= r^2 + r^3 + \dots + r^{n+1} \\ rS - S &= r^{n+1} - r \\ S &= \frac{r^{n+1} - r}{r - 1} \end{aligned}$$

□

**Examples 1.13**

$$\sum_{i=1}^{100} i = \frac{100 * (100 + 1)}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$$

$$\sum_{k=5}^{12} k^2 =$$

---

$$\sum_{i=1}^{20} i^2 - i - 10 =$$

---