

Exercices 7

by Aram Dermenjian

12 novembre 2018

Un exercice marqué du symbole \star est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen.

Exercice 1 Évaluez l'intégrales indéfinies suivantes :

- (1) $\int \frac{x}{x^2-6x+8} dx$
- (2) $\int \frac{x^3}{(x+1)(x-1)^2} dx$
- (3) $\int \frac{2x^3-3x-2}{x^3+x^2-2x} dx$
- (4) $\int \frac{x}{(x-4)^3} dx$
- (5) $\int \frac{1}{(x+1)^2 x^2} dx$
- (6) $\int \frac{1}{x^3+x} dx$
- (7) \star $\int \frac{4x}{x^4+6x^2+5} dx$
- (8) \star $\int \frac{x^3-3x^2+2x-3}{(x^2+1)^2} dx$
- (9) \star $\int \frac{x^2-4}{x^3-1} dx$
- (10) \star $\int \frac{8(x^2-2x)}{(x^2+1)^2(x-1)^2} dx$

Démonstration. (1) $-\log(x-2) + 2 \log(x-4) + c$

- (2) $x - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{4} \log(x+1) + \frac{5}{4} \log(x-1) + c$
- (3) $2x - 2 \log(x+2) - \log(x-1) + \log(x) + c$
- (4) $-\frac{x-2}{x^2-8x+16} + c$
- (5) $-\frac{2x+1}{x^2+x} + 2 \log(x+1) - 2 \log(x) + c$
- (6) $-\frac{1}{2} \log(x^2+1) + \log(x) + c$
- (7) \star $-\frac{1}{2} \log(x^2+5) + \frac{1}{2} \log(x^2+1) + c$
- (8) \star $-\frac{1}{2(x^2+1)} - 3 \arctan(x) + \frac{1}{2} \log(x^2+1) + c$
- (9) \star $\frac{4}{3} \sqrt{3} \arctan\left(\frac{1}{3} \sqrt{3}(2x+1)\right) + \log(x^2+x+1) - \log(x-1) + c$
- (10) \star $\frac{2(3x^2-x)}{x^3-x^2+x-1} + 2 \arctan(x) - 2 \log(x^2+1) + 4 \log(x-1) + c$

□

Exercice 2 Évaluez l'intégrales définies suivantes :

- (1) $\int_0^3 \frac{x^2-1}{x^2+1} dx$
- (2) $\int_0^1 \frac{2x^3+x^2}{x^2-4} dx$
- (3) $\int_0^1 \frac{7x^3-x^2+17x-3}{(x^2+3)(x^2+1)} dx$
- (4) $\int_{-1}^1 \frac{2x^5+4x^3+x^2+1}{(x^2+1)^2} dx$

Démonstration. (1) $-2 \arctan(3) + 3$

- (2) $3 \log(3) - 8 \log(2) + 2$

(3) $-\frac{1}{4}\pi - \log(3) + \frac{9}{2}\log(2)$

(4) $\frac{1}{2}\pi$

□

Exercice 3 Évaluez le volume du solide obtenu par la rotation de la surface S autour de la droite indiquée.

(1) La surface S sous la courbe $f(x) = -x^2 + 9$ au-dessus de l'intervalle $[0, 3]$, autour de l'axe x .

(2) La surface S sous la courbe $f(x) = -x^2 + 9$ au-dessus de l'intervalle $[0, 3]$, autour de l'axe y .

(3) La surface S sous la courbe $f(x) = x^2 + 1$ au-dessus de l'intervalle $[0, 1]$, autour de l'axe x .

(4) La surface S délimitée par les droites $y = 4$, $x = 0$ et la courbe $f(x) = \sqrt{x}$, autour de l'axe y .

(5) La surface S sous la courbe $f(x) = -x^2 + 3x$ au-dessus de l'axe x , autour de la droite $y = 0$.

(6) La surface S délimitée par les droites $y = 1$, $x = 1$, et la courbe $f(x) = x^2 + 1$, autour de la droite $y = 1$.

(7) La surface S sous la courbe $f(x) = e^x$ au-dessus de l'intervalle $[-1, \ln(5)]$, autour de l'axe x .

(8) La surface S sous la courbe $f(x) = \cos(x)$ au-dessus de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, autour de l'axe x .

Démonstration. (1) $\frac{648}{5}\pi$

(2) $\frac{45}{2}\pi$

(3) $\frac{28}{15}\pi$

(4) $\frac{1024}{5}\pi$

(5) $\frac{81}{10}\pi$

(6) $\frac{1}{5}\pi$

(7) $-\frac{1}{2}\pi(e^{(-2)} - 25)$

(8) $\frac{1}{4}\pi^2$

□

Exercice 4 Évaluez le volume du solide obtenu par la rotation de la surface S autour de la droite indiquée.

(1) La surface S comprise entre les courbes $f(x) = -x + 7$ et $g(x) = \frac{12}{x}$, autour de l'axe x .

(2) La surface S comprise entre les courbes $f(x) = x^3$ et $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$, dans le premier quadrant, autour de l'axe y .

(3) La surface S délimitée par les droites $x = 0$, $y = 9$, et la courbe $f(x) = x^3$, autour de la droite $y = 9$.

(4) La surface S comprise entre les courbes $f(x) = x^2 - x$ et $g(x) = -x^2 + 3$, autour de la droite $y = -1$.

- (5) La surface S sous la courbe $f(x) = \sin(x)$ au-dessus de l'intervalle $[0, \pi]$, autour de la droite $y = 2$.
- (6) La surface S sous la courbe $f(x) = \sqrt{x}$ au-dessus de l'intervalle $[0, 1]$, autour de la droite $x = 2$.

Démonstration. (1) $\frac{1}{3} \pi(504 \log(3) - 1008 \log(2) + 145)$

- (2) $\frac{128}{455} \pi$
- (3) $\frac{2673}{14} \pi$
- (4) $\frac{245}{48} \pi$
- (5) $\frac{1}{2} \pi(9\pi - 16)$
- (6) $\frac{43}{15} \pi$

□

Exercice 5 Évaluez le volume du solide obtenu par la rotation de la surface S autour de la droite indiquée.

- (1) La surface S sous la courbe $f(x) = \sin(x^2)$ au-dessus de l'intervalle $[0, \sqrt{\pi}]$, autour de l'axe y .
- (2) La surface S sous la courbe $f(x) = \sin(x)$ au-dessus de l'intervalle $[0, \pi]$, autour de l'axe y .
- (3) La surface S au-dessus de la courbe $f(x) = \cos(x)$ sous l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, autour de l'axes y .
- (4) La surface S sous la courbe $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ au-dessus de l'intervalle $[0, 2]$, autour de l'axe y .
- (5)★ La surface S sous la courbe $-x^3 + x$ au-dessus de l'intervalle $[0, 1]$, autour de la droite $x = 1$.
- (6)★ La surface S comprise entre les courbes $f(x) = x^2 - x$ et $g(x) = -x^2 + 3$, autour de la droite $x = 2$.

Démonstration. (1) 2π

- (2) $2\pi^2$
- (3) $-4\pi^2$
- (4) $\frac{28}{3}\pi$
- (5) $-\frac{7}{30}\pi$
- (6) $-\frac{135}{32}\pi$

□