

## Exercices 7

by Aram Dermenjian

12 novembre 2018

Un exercice marqué du symbole  $\star$  est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen.

**Exercice 1** Évaluez l'intégrales indéfinies suivantes :

- (1)  $\int \frac{x}{x^2-6x+8} dx$
- (2)  $\int \frac{x^3}{(x+1)(x-1)^2} dx$
- (3)  $\int \frac{2x^3-3x-2}{x^3+x^2-2x} dx$
- (4)  $\int \frac{x}{(x-4)^3} dx$
- (5)  $\int \frac{1}{(x+1)^2 x^2} dx$
- (6)  $\int \frac{1}{x^3+x} dx$
- (7) $\star$   $\int \frac{4x}{x^4+6x^2+5} dx$
- (8) $\star$   $\int \frac{x^3-3x^2+2x-3}{(x^2+1)^2} dx$
- (9) $\star$   $\int \frac{x^2-4}{x^3-1} dx$
- (10) $\star$   $\int \frac{8(x^2-2x)}{(x^2+1)^2(x-1)^2} dx$

*Démonstration.* (1)  $-\log(x-2) + 2 \log(x-4) + c$

- (2)  $x - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{4} \log(x+1) + \frac{5}{4} \log(x-1) + c$
- (3)  $2x - 2 \log(x+2) - \log(x-1) + \log(x) + c$
- (4)  $-\frac{x-2}{x^2-8x+16} + c$
- (5)  $-\frac{2x+1}{x^2+x} + 2 \log(x+1) - 2 \log(x) + c$
- (6)  $-\frac{1}{2} \log(x^2+1) + \log(x) + c$
- (7) $\star$   $-\frac{1}{2} \log(x^2+5) + \frac{1}{2} \log(x^2+1) + c$
- (8) $\star$   $-\frac{1}{2(x^2+1)} - 3 \arctan(x) + \frac{1}{2} \log(x^2+1) + c$
- (9) $\star$   $\frac{4}{3} \sqrt{3} \arctan\left(\frac{1}{3} \sqrt{3}(2x+1)\right) + \log(x^2+x+1) - \log(x-1) + c$
- (10) $\star$   $\frac{2(3x^2-x)}{x^3-x^2+x-1} + 2 \arctan(x) - 2 \log(x^2+1) + 4 \log(x-1) + c$

□

**Exercice 2** Évaluez l'intégrales définies suivantes :

- (1)  $\int_0^3 \frac{x^2-1}{x^2+1} dx$
- (2)  $\int_0^1 \frac{2x^3+x^2}{x^2-4} dx$
- (3)  $\int_0^1 \frac{7x^3-x^2+17x-3}{(x^2+3)(x^2+1)} dx$
- (4)  $\int_{-1}^1 \frac{2x^5+4x^3+x^2+1}{(x^2+1)^2} dx$

*Démonstration.* (1)  $-2 \arctan(3) + 3$

- (2)  $3 \log(3) - 8 \log(2) + 2$

(3)  $-\frac{1}{4}\pi - \log(3) + \frac{9}{2}\log(2)$

(4)  $\frac{1}{2}\pi$

□

**Exercice 3** Évaluez le volume du solide obtenu par la rotation de la surface  $S$  autour de la droite indiquée.

(1) La surface  $S$  sous la courbe  $f(x) = -x^2 + 9$  au-dessus de l'intervalle  $[0, 3]$ , autour de l'axe  $x$ .

(2) La surface  $S$  sous la courbe  $f(x) = -x^2 + 9$  au-dessus de l'intervalle  $[0, 3]$ , autour de l'axe  $y$ .

(3) La surface  $S$  sous la courbe  $f(x) = x^2 + 1$  au-dessus de l'intervalle  $[0, 1]$ , autour de l'axe  $x$ .

(4) La surface  $S$  délimitée par les droites  $y = 4$ ,  $x = 0$  et la courbe  $f(x) = \sqrt{x}$ , autour de l'axe  $y$ .

(5) La surface  $S$  sous la courbe  $f(x) = -x^2 + 3x$  au-dessus de l'axe  $x$ , autour de la droite  $y = 0$ .

(6) La surface  $S$  délimitée par les droites  $y = 1$ ,  $x = 1$ , et la courbe  $f(x) = x^2 + 1$ , autour de la droite  $y = 1$ .

(7) La surface  $S$  sous la courbe  $f(x) = e^x$  au-dessus de l'intervalle  $[-1, \ln(5)]$ , autour de l'axe  $x$ .

(8) La surface  $S$  sous la courbe  $f(x) = \cos(x)$  au-dessus de l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , autour de l'axe  $x$ .

*Démonstration.* (1)  $\frac{648}{5}\pi$

(2)  $\frac{45}{2}\pi$

(3)  $\frac{28}{15}\pi$

(4)  $\frac{1024}{5}\pi$

(5)  $\frac{81}{10}\pi$

(6)  $\frac{1}{5}\pi$

(7)  $-\frac{1}{2}\pi(e^{(-2)} - 25)$

(8)  $\frac{1}{4}\pi^2$

□

**Exercice 4** Évaluez le volume du solide obtenu par la rotation de la surface  $S$  autour de la droite indiquée.

(1) La surface  $S$  comprise entre les courbes  $f(x) = -x + 7$  et  $g(x) = \frac{12}{x}$ , autour de l'axe  $x$ .

(2) La surface  $S$  comprise entre les courbes  $f(x) = x^3$  et  $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$ , dans le premier quadrant, autour de l'axe  $y$ .

(3) La surface  $S$  délimitée par les droites  $x = 0$ ,  $y = 9$ , et la courbe  $f(x) = x^3$ , autour de la droite  $y = 9$ .

(4) La surface  $S$  comprise entre les courbes  $f(x) = x^2 - x$  et  $g(x) = -x^2 + 3$ , autour de la droite  $y = -1$ .

- (5) La surface  $S$  sous la courbe  $f(x) = \sin(x)$  au-dessus de l'intervalle  $[0, \pi]$ , autour de la droite  $y = 2$ .
- (6) La surface  $S$  sous la courbe  $f(x) = \sqrt{x}$  au-dessus de l'intervalle  $[0, 1]$ , autour de la droite  $x = 2$ .

*Démonstration.* (1)  $\frac{1}{3} \pi(504 \log(3) - 1008 \log(2) + 145)$

(2)  $\frac{128}{455} \pi$

(3)  $\frac{2673}{14} \pi$

(4)  $\frac{245}{48} \pi$

(5)  $\frac{1}{2} \pi(9\pi - 16)$

(6)  $\frac{43}{15} \pi$

□

**Exercice 5** Évaluez le volume du solide obtenu par la rotation de la surface  $S$  autour de la droite indiquée.

- (1) La surface  $S$  sous la courbe  $f(x) = \sin(x^2)$  au-dessus de l'intervalle  $[0, \sqrt{\pi}]$ , autour de l'axe  $y$ .
- (2) La surface  $S$  sous la courbe  $f(x) = \sin(x)$  au-dessus de l'intervalle  $[0, \pi]$ , autour de l'axe  $y$ .
- (3) La surface  $S$  au-dessus de la courbe  $f(x) = \cos(x)$  sous l'intervalle  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ , autour de l'axes  $y$ .
- (4) La surface  $S$  sous la courbe  $f(x) = (x - 1)^2 + 2$  au-dessus de l'intervalle  $[0, 2]$ , autour de l'axe  $y$ .
- (5)★ La surface  $S$  sous la courbe  $-x^3 + x$  au-dessus de l'intervalle  $[0, 1]$ , autour de la droite  $x = 1$ .
- (6)★ La surface  $S$  comprise entre les courbes  $f(x) = x^2 - x$  et  $g(x) = -x^2 + 3$ , autour de la droite  $x = 2$ .

*Démonstration.* (1)  $2\pi$

(2)  $2\pi^2$

(3)  $-4\pi^2$

(4)  $\frac{28}{3} \pi$

(5)  $-\frac{7}{30} \pi$

(6)  $-\frac{135}{32} \pi$

□